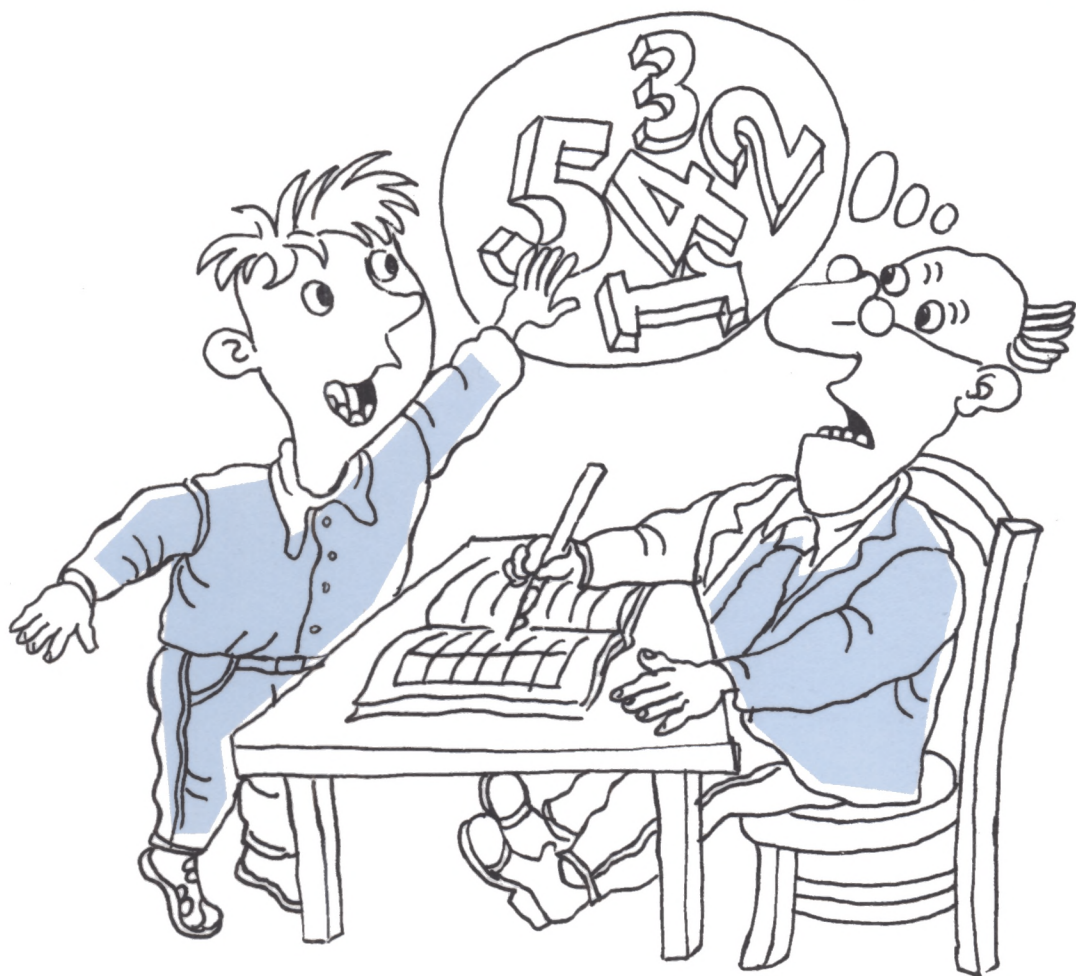


Т В О Й К Р У Г О З О Р

Е. И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ

КНИГА III



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»



Т В О Й К Р У Г О З О Р

Е. И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ,
или АРИФМЕТИКА ДЛЯ ВСЕХ

КНИГА III

ПОД РЕДАКЦИЕЙ Г. З. ГЕНКИНА

ИЛЛЮСТРАЦИИ С. В. САВИЛОВА

М О С К В А

« П Р О С В Е Щ Е Н И Е »

2 0 0 8

УДК 087.5:51
ББК 22.1
И26

Серия «Твой кругозор» основана в 2007 году

ИГНАТЬЕВ Е. И.

И26 В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. III : [для ст. шк. возраста] / Е. И. Игнатъев; под ред. Г. З. Генкина; ил. С. В. Савилова. — М. : Просвещение, 2008. — 128 с. : ил. — (Твой кругозор). — ISBN 978-5-09-018202-7.

Это новое издание знаменитого трехтомника занимательных задач выходит в год его столетнего юбилея. Как и век назад, он доставит своим читателям много приятных минут, поможет развить логическое мышление и смекалку.



**УДК 087.5:51
ББК 22.1**

ISBN 978-5-09-018202-7

© Издательство «Просвещение»,
оформление, дизайн серии, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие научного редактора	8
ВСТУПЛЕНИЕ	10
Задача 1. Где начинается Новый год	10
Задача 2. Три воскресенья на одной неделе	14
Задача 3. Определение направления с помощью карманных часов	17
ХИТРЫЕ ЗАДАЧИ	19
Задача 4. Сколько воды в бочке	19
Задача 5. Крест обратить в квадрат	19
Задача 6. Коврик	20
Задача 7. Оригинальное доказательство	21
Задача 8. Вычерчивание циркулем овальных линий	22
Задача 9. Теорема Пифагора	23
Задача 10. Египетская задача	24
Задача 11. Численный круг пифагорейцев	27
Задача 12. Земля и апельсин	29
ЗАДАЧИ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ СО СПИЧКАМИ	31
Задача 13. Дом	31
Задача 14. Весы	31
Задача 15. Храм	32
Задача 16. Памятник	32
Задача 17. Из двух рюмок целый дом	32
Задача 18. Флюгер	32
Задача 19. Фонарь и топор	32
Задача 20. Лампа	33
Задача 21. Ключ	33
Задача 22. Звезда, два креста, четыре квадрата и мельница	33
Задача 23. Дележ сада	36
Задача 24. Сообразите-ка!	37

Задача 25. Расстановка часовых	37
Задача 26. Хитрецы	38
Задача 27. Угадай-ка!	39
Задача 28. Верная отгадка	39
Задача 29. Собрать в группы по 2	40
Задача 30. Собрать в группы по 3	40
Задача 31. Перемещение лошадей	41
Задача 32. Поднять одной спичкой 15 спичек	41
Задача 33. Спичечный телеграф	42
Задача 34. Легко или нет	43

ЛАБИРИНТЫ 44

Задача 35. Филадельфийский лабиринт	55
Задача 36. Хижина Розамунды	57
Задача 37. Еще лабиринт	58
Задача 38. Картографический вопрос, или Теорема о четырех красках	58

НОВЫЙ РОД ЗАДАЧ 60

Задача 39. Написать единицу тремя пятерками	60
Задача 40. Написать нуль тремя пятерками	60
Задача 41. Написать 2 тремя пятерками	61
Задача 42. Написать 5 тремя пятерками	61
Задача 43. Написать 31 пятью тройками	61

СТО ТЫСЯЧ ЗА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 63

ИЗ ОБЛАСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЕЛ 68

Задача 44. Быстрое возвышение в квадрат	68
Задача 45. Особенные случаи умножения	69
Задача 46. Девять	70
Задача 47. Угадаем число!	71
Задача 48. Фокус!	72
Задача 49. Еще один фокус с девяткой	72
Задача 50. Суперфокус	73

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ КУРЬЕЗЫ 74

Задача 51. О числах 37 и 41	75
Задача 52. Числа 1375, 1376, и 1377	76
Задача 53. Степени чисел, состоящие из одних и тех же цифр	76
Задача 54. Квадраты чисел, не содержащие одних и тех же цифр	76
Задача 55. Все разные цифры	77
Задача 56. Числа, отличающиеся от своих логарифмов только местом запятой, отделяющей десятичные знаки	78
Задача 57. Круговые числа	78
Задача 58. Мгновенное умножение	83

СОФИЗМЫ	85
Задача 59. Софистическая карикатура	86
Задача 60. Равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неверно!	86
Задача 61. Что можно получить из равенства $0 = 0$	87
Задача 62. Почему $2 = 1$?	87
Задача 63. $-1 = 1$	88
Задача 64. $-1 > 1$	88
Задача 65. $2 = 3$	89
Задача 66. $2 > 3$	89
Задача 67. Дележ верблюдов	90
Задача 68. Два общих наибольших делителя	90
Задача 69. Искусная починка	91
Задача 70. Обобщение того же софизма	93
Задача 71. Похоже, но не то	97
Задача 72. Еще парадокс	99
МАТЕМАТИКА В ПРИРОДЕ	100
Задача 73. «Золотое деление»	100
Задача 74. Математический инстинкт пчел	108
Задача 75. О пчелиных ячейках	110
Задача 76. Жук-геометр	113
Задача 77. Построение жука-геометра	116
НЕКОТОРЫЕ ФОКУСЫ	117
Задача 78. Странная история	117
Задача 79. Феноменальная память	118
Задача 80. Математическое ясновидение	120
Задача 81. Отгадывание костей домино	122
Задача 82. Хитрая механика	123
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	125
Математика как искусство хорошо говорить	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Цель третьей книги о царстве смекалки, в общем, та же, что и первых двух: в доступной, легкой и по возможности занимательной форме быть гидом в области начал математических знаний — в «царстве смекалки», т.к. насколько больше этого математического царства в других науках, настолько больше эти науки состоялись.

Как и первые две наши книги, эта последняя может послужить дополнительным пособием в обучении математике, а также для математического самообразования, самостоятельности, ориентации и усвоения основных разделов.

Как и в первых двух наших книгах, в этой в качестве основного обучающего метода мы использовали «занимательные задачи», решения которых не требуют, как правило, никакой особой специальной математической подготовки.

Но если по общим целям эта третья книга есть продолжение и завершение дела, начатого первыми двумя, то она значительно разнится от предыдущих выполнением. Те книги имели прежде всего в виду ознакомить русскую семью и школу с известным и распространенным материалом. Вот почему в первые части вошло довольно много таких задач и вопросов, которые иному «знатоку» могут показаться известными и шаблонными. Впрочем, много ли у нас таких «знатоков»?

В этой книге, как читатель сможет убедиться, мы в популярной форме поднимаемся на следующую, высшую ступень. С одной стороны, значительно расширяется математический кругозор, с другой — более тщательно и строго подбирается материал. Наряду с легкостью, доступностью и возможной занимательностью изложения мы стараемся, где возможно, побудить читателя и к научному, теоретическому взгляду на предмет, что, по нашему убеждению, способствует раскрытию его творческого потенциала.

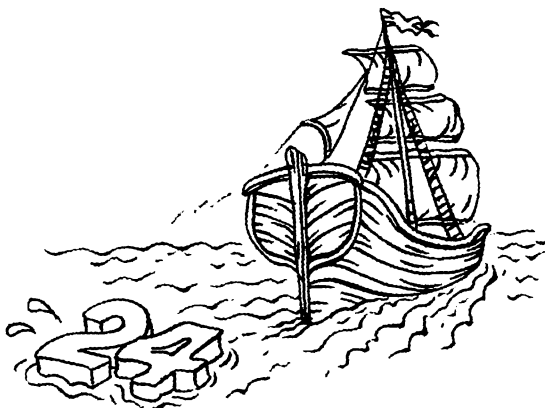
Как и раньше, читатель по собственному усмотрению знакомится с этой книгой. Соблюдать последовательное чтение согласно нумерации разделов в оглавлении совсем не обязательно.

Быть может, ничто так не изощряет и не оттачивает в известном отношении математическую смекалку, как умение разбираться в так называемых математических софизмах и парадоксах. Жаль только, что в имеющихся у нас книжках с подобным материалом предлагаются сами задачи без общего разъяснения сущности софизма. Вот почему этому предмету помимо задач посвящены разделы общего содержания. Думаем, что даже для знатоков софизмов они не будут лишними. Не без интереса также, полагаем, отнесется читатель к попыткам беллетристической обработки чисто математических тем.

Иному, пожалуй, покажется странным найти в конце книги несколько страниц, посвященных известного рода «математическим фокусам». На это заметим, что в область смекалки входит также умение разбираться, проделывают ли перед вами просто фокус или действительную математическую комбинацию.

Г. З. Генкин

ВСТУПЛЕНИЕ



Задача 1-я. Где начинается Новый год?

Обыкновенно спрашивают, когда начинается Новый год, и мало кто задается вопросом: где он начинается?

Решение

Вопрос этот пожалуй, может даже показаться нелепым, какой-то задачей-шуткой, типа вопросов: почему (по **чему**) птица летает или отчего (от **чего**) утка плавает? Кажется ясным, что Новый год начинается там, где он начинается, и спрашивать тут, собственно, не о чем.

Однако дело не так-то просто, как кажется, и вопрос — где, в каком пункте земного шара впервые наступает Новый год, имеет вполне определенный смысл.

Допустим, что вы встречаете Новый год в Москве. Вот куранты бьют двенадцать часов: в этот момент в Москве наступил Новый год. Но мы знаем, что наши нижегородские знакомые уже полчаса как встретили Новый год, так как в Нижнем часы показывают половину первого, когда в Москве двенадцать. В Омске Новый год встретили еще $2\frac{1}{2}$ часа тому назад, в Красноярске — целых 4 часа тому назад, а на Камчатке — даже на целых 9 часов ранее. Следовательно, вы сейчас встретили в Москве вовсе уже не Новый год, ведь ему уже по меньшей мере девять часов, этому Новому году!

Итак, Новый год начался где-то далеко на востоке и оттуда пришел к нам. Но где, в каком месте земного шара он впервые явился? Такой вопрос, как видим, имеет вполне определенный смысл. И на него надо уметь ответить.

Мы знаем уже, что на Камчатке Новый год наступил на 9 часов раньше, чем в Москве. Попробуем подвигаться далее на восток и попытаемся отыскать, где он начался всего ранее. В Беринговом проли-

ве он наступил на 11 часов раньше, чем в Москве. В Сан-Франциско — на 14 часов раньше, в Чикаго — на 16, в Филадельфии — на 17, в Лондоне — на 20, в Париже — почти на 22, в Вене — на 23 и, наконец, в Москве — на 24!

Мы пришли к абсурдному выводу, что в Москве Новый год наступил на 24 часа раньше, чем в той же Москве!

Недоумение наше еще более возрастет, если мы будем двигаться от Москвы не на восток, а на запад. В тот момент, когда в Москве только что наступил Новый год, в Варшаве всего десять часов, т.е. там еще старый год. Идя все далее и далее на запад, мы наконец прибудем снова в Москву — и окажется, что там одновременно должны быть и старый, и Новый год. Получается опять нелепость — что в Москве Новый год наступает и в данный момент, и на 24 часа раньше, и на 24 позднее.

Очевидно, все это происходит вследствие того, что Земля — шар. Однако же мы знаем, что в Москве Новый год наступает во вполне определенный момент, и, следовательно, наше рассуждение чем-нибудь да грешит, раз мы пришли к выводу, что на одном и том же пункте Новый год наступает три дня кряду.

Нетрудно догадаться, в чем тут промах. Раз в данный момент к востоку от Москвы **Новый год**, а к западу от нее пока еще **старый год**, то вследствие шарообразности Земли должна существовать где-то *пограничная линия*, разделяющая область со старым годом от области с новым годом.

Такая пограничная линия на самом деле и существует; положение ее определяется не какими-нибудь астрономическими условиями, а просто **практикой мореплавания**.

Дело в том, что затруднения, с которыми мы сейчас встретились, возникают не только в этом случае, но и тогда, когда ищут начала счета любого дня недели. Рассуждениями, вполне сходными с только что приведенными, легко убедиться, что где-то на земном шаре должна существовать линия, по одну сторону которой будет определенный день недели, например, среда, а по другую — следующий, четверг.

Практическая же надобность в установлении подобной границы, или так называемой **демаркационной** линии, возникла из необходимости регулировать ведение календаря во время плаваний. Известно, что при кругосветных путешествиях с запада на восток один день как бы выигрывается, и путешественник, прибыв в исходный пункт, считает на день более, чем следует; при путешествии же с востока на запад наблюдается обратное: путешественник в счете дней отстает от истинного и как бы теряет одни сутки. Причину этого на первый взгляд непонятного явления легко раскрыть, если принять во внимание, что кругосветный путешественник делает один лишний оборот вокруг земной оси — при движении на восток и, напротив, делает одним оборотом менее при движении на запад¹. Другими словами, путешественник в

¹Напомним, что так как кажущееся суточное движение Солнца совершается с востока на запад, то истинное вращение Земли вокруг своей оси происходит в обратном направлении, то есть с запада на восток.

первом случае увидит восход солнца одним разом более, во втором — менее, нежели прочие люди, остающиеся на месте. А если он увидит одним восходом солнца более или менее, то, следовательно, будет насчитывать в протекшем времени одними сутками более или же менее. Мы знаем, что благодаря этому Филеас Фогг, герой романа Жюль Верна «80 дней вокруг света», выиграл свое оригинальное пари. Впервые указанная особенность в счете дней при кругосветных путешествиях стала известна после первого кругосветного плавания Магеллана. Спутник погибшего Магеллана, Себастиан дель Кано, при возвращении в Европу «привез с собой четверг», в то время как здесь была уже пятница.

С этого времени мореплаватели начали постепенно устанавливать демаркационную линию. Линия эта, ограничивающая области с различными днями недели, следует по западной части Великого океана. Она проходит через Берингов пролив, затем направляется к берегам Японии, огибает с запада острова Марианские и Каролинские и идет далее к югу, огибая с востока Филиппины, Новую Гвинею, Австралийский материк, Новую Каледонию и Новую Зеландию (см. карту на рис. 1).

Таким образом, когда на Филиппинских островах, скажем, четверг, тогда на соседних с ними Каролинских, всего в полусотне верст, тот же день называется средой. Произошло это просто потому, что Филиппины были открыты голландскими мореплавателями, прибывшими с востока, а Каролинские острова открыты испанцами, отправлявшимися в путь из Европы на запад, через Атлантический океан, мимо Южной Америки и через Великий океан.

Рассматривая карту, мы видим также, что подобная же разница в счете дней недели наблюдается и между Камчаткой и Аляской: когда на Камчатке понедельник, на Аляске воскресенье.

Понятно, что это вносило бы невероятную путаницу в календарь и вызвало бы значительные неудобства, если бы демаркационная линия проходила не через водные пустыни Тихого океана, а через материки Европы и Северной Америки.

Но каким же образом эта демаркационная линия помогает мореплавателям регулировать календарь? Вот каким. Когда судно пересекает эту линию с запада на восток, то следующий день и число месяца считают за предыдущие, т.е. **дважды считают один и тот же день** недели и число месяца. Если, например, демаркационная линия была пересечена в среду 14 мая, то и следующий день считают за среду 14 мая. В судовой книге, таким образом, на этой неделе будет две среды и два раза подряд 14 мая. Благодаря этому уничтожается лишний день, который «выигрывается» при путешествии с запада на восток. Наоборот, когда судно пересекает демаркационную линию с востока на запад, то после пересечения пропускают целые сутки, другими словами, считают уже следующий день и число. Например, если линия пересечена в воскресенье 3 августа в 7 часов вечера, то считают 8-й час уже не воскресенья, а понедельника 4 августа. Так наверстывается день, который был бы «потерян» при кругосветном плавании.

Где начинается Новый год? Положение демаркационной линии.

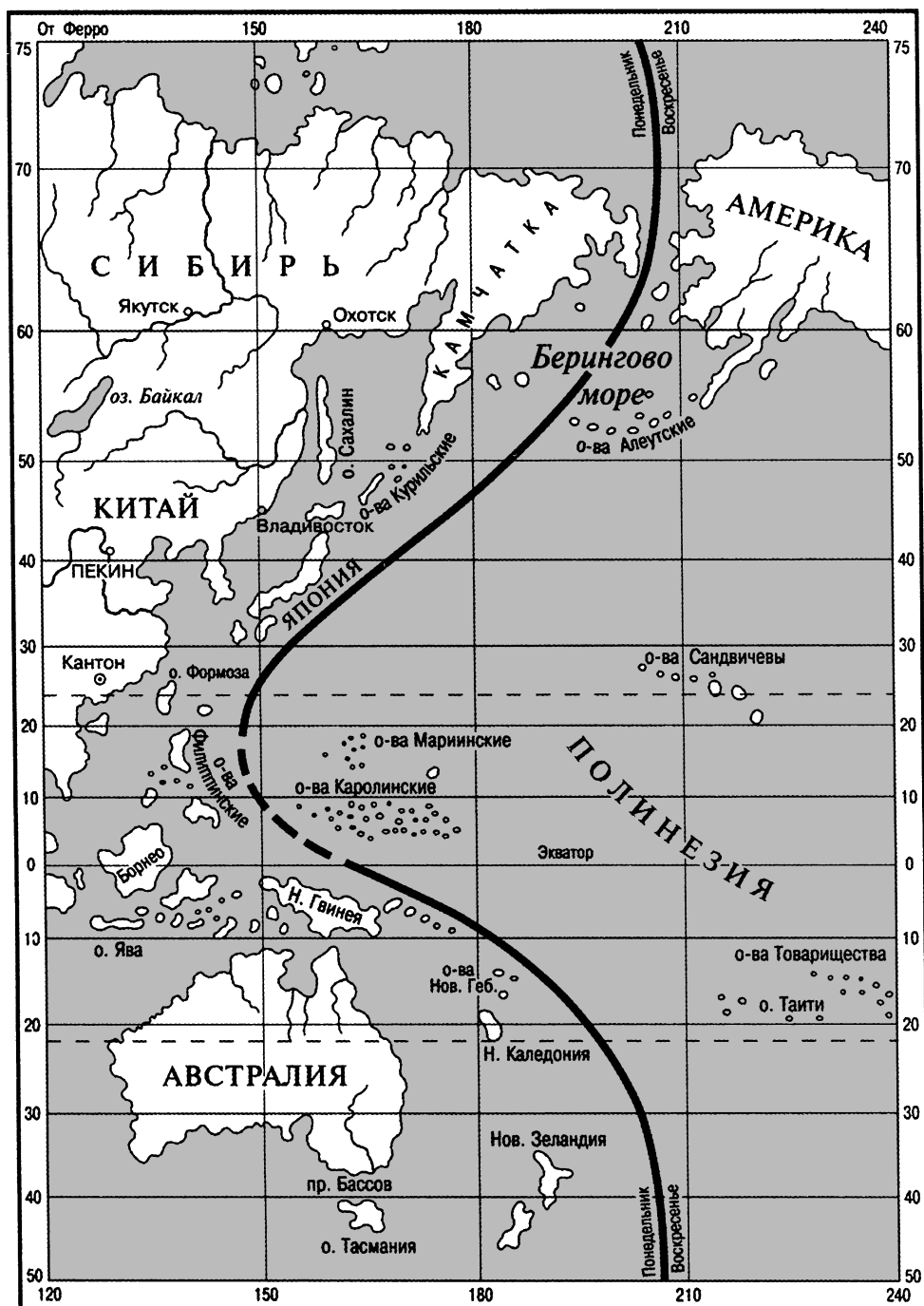


Рис. 1

Само собой разумеется, что все это было проделано капитаном и того судна, на котором плыл герой романа Филеас Фогт. Если бы педантичный англичанин не был так поглощен своим пари и обращал внимание на окружающее, а наивный Паспарту не воображал, что часы его идут «вернее солнца», — то, конечно, они не могли бы проглядеть того, что у них пятница, когда кругом всего еще только четверг.

Теперь мы уже знаем, где начинается Новый год, где зарождаются дни, недели, месяцы. Там, далеко, на островах Тихого океана, они впервые отделяются от вечности и беззвучно опускаются на наш земной шар. А оттуда быстро-быстро, *со скоростью 15 градусов в час*, они бегут легкою тенью по земле, один за другим, посещая все пункты нашей планеты. И, обжевав кругом земной шар, опять возвращаются к этой границе, чтобы здесь покинуть Землю и снова уйти в вечность навсегда.

Задача 2-я.

Три воскресенья на одной неделе

Может ли на одной неделе быть три воскресенья?

Решение

Мы знаем, что у некоторых людей бывает «семь пятниц на одной неделе».

Предлагаем читателю прочесть небольшой остроумный рассказ знаменитого американского писателя Эдгара По — рассказ, который так и называется:

«Три воскресенья на одной неделе»¹

«Ах ты, упрямый старикашка!» — мысленно обратился я однажды к дяде Ремгеджеру, гневно сжав кулак (тоже, впрочем, лишь в мыслях).

Да, только мысленно. На самом деле то, что я думал, несколько отличалось от того, что я действительно исполнил. Когда я открыл дверь в комнату дяди, старик сидел, вытянув ноги к камину, держа кружку с пивом в руках, и добросовестнейшим образом исполнял совет старой песни:

Наполняй пустой бокал,
Полный — выпивай до дна!

— Дорогой дядя, — начал я, тихо притворив дверь его комнаты и подходя к нему с сладкой миной, — вы всегда были ко мне так расположены и столько раз доказали свою доброту, что я не сомневаюсь в вашей помощи и на этот раз.

— Продолжай, мальчик, продолжай! — процедил дядя.

¹Перевод Михаила Энгельгардта.

— Я убежден, дорогой дядя (чтоб тебя, старого скрягу!), что вы не станете серьезно противиться моей женитьбе на Кэт. Вы ведь только шутили, не правда ли? О, вы такой шутник, дядюшка, ха-ха-ха!

— Ха-ха-ха! — подхватил дядя. — Вот это правда, черт побери!

— Ну вот, я так и знал! А теперь, дорогой дядя, я и Кэт ждем от вас только указания... относительно срока... Словом сказать, дорогой дядюшка, на когда, по вашему мнению, всего удобнее будет назначить нашу свадьбу?

— Свадьбу? Какую? Вот еще новости! И думать не смей об этом!

— Ха-ха-ха! Хо-хо-хо!.. Хи-хи-хи... Это славно! Милый дядюшка, какой вы весельчак! Теперь остается только точно назначить день...

— А? Точно назначить?

— Да, дядюшка, если будете так добры...

— Ты хочешь точно знать срок? Хорошо, Бобби, так и быть, улагодить тебя.

— Ах, милый дядюшка!..

— Погоди. Итак, я изъявляю полное согласие. Сегодня воскресенье, да? Хорошо-с. Так слушай же: можешь венчаться с Кэт, ну, когда бы?.. Когда будет три воскресенья сряду на одной неделе! Чего ты глаза выпучил? Говорю же тебе: свадьба твоя будет, когда три воскресенья придут сряду на одной неделе. Ни одним днем раньше! Ты знаешь меня, слово мое неизменно. А теперь проваливай!

И он снова принялся за свое пиво. Я же в отчаянии выбежал вон из комнаты.

Дядя мой, Ремгеджер, был, что называется, очень милый старичок, но имел свои странности. Будучи добродушен по натуре, он, благодаря страсти противоречить, приобрел среди многих, не знавших его близко, репутацию скряги. В него словно вселился бес отрицания, и на каждый вопрос он спешил ответить «нет!» Но в конце концов, после долгих переговоров, никогда почти не случалось, чтобы просьба оставалась неисполненной. Мало кто делал столько добра, сколько делал он — и в то же время так неохотно, как он.

Оставшись сиротой после смерти моих родителей, я все время воспитывался и жил у старика дяди. Может быть, по-своему чудак и любил меня, хотя не так, как свою внучку Кэт. С первого же года он частенько драл меня, с пяти лет до пятнадцати — страшил исправительным домом; с пятнадцати до двадцати — ежедневно грозил выгнать меня без копейки денег. Зато я имел верного друга в Кэт. Она была прелестная девушка и премило заявила мне, что станет моей, со всем своим приданым, как только я уговорю ее дедушку Ремгеджера. Бедняжке было всего шестнадцать лет, и до совершеннолетия она не вправе была распоряжаться своим капиталом без согласия деда. Но дедушка оставался непоколебим, несмотря на все наши мольбы. Сам библейский Иов возроптал бы при виде того, как он издевался над нами, словно кот над мышами. В глубине души дедушка был доволен нашим решением и охотно выложил бы десять тысяч фунтов из собственных средств, если бы Кэт не имела приданого. Но ему нужен был благовидный предлог, чтобы уступить нашим мольбам. Наша ошибка состояла в том, что мы вздумали сами хлопотать о своей

свадьбе, а при таких обстоятельствах дедушка положительно не в силах был не оказать нам противодействия.

Дядя считал бесчестьем отступать от раз данного слова, но зато готов был толковать смысл вкривь и вкось, лишь бы остаться верным букве. Вот этой чертой и воспользовалась лукавая Кэт вскоре после моего знаменательного разговора с дядей.

Расскажу вкратце, как это произошло. Судьбе угодно было, чтобы среди знакомых моей невесты были два моряка, недавно возвратившиеся в Англию после кругосветного плавания. Недели через три после памятного разговора, в воскресенье после обеда, я вместе с этими моряками зашел к дяде в гости. Около получаса мы говорили о разных безразличных вещах, пока разговор наш не принял такое направление:

КАПИТАН ПРАТ. Целый год пробыл я в плавании. Ей-богу, сегодня как раз годовщина моего отъезда. Помните, м-р Ремгеджер, как я пришел к вам прощаться ровнохонько год тому назад? И замечательно, что тут же сидит наш приятель Смисертон, который тоже ведь проплавал целый год.

КАПИТАН СМИСЕРТОН. Да, год без малого. Помните, м-р Ремгеджер, как я зашел к вам проститься?

Дядя. Еще бы! В самом деле поразительно — оба вы пропадали ровно год. Замечательное совпадение.

КЭТ. Тем более что капитан Прат и капитан Смисертон ехали совсем разными путями: первый обогнул мыс Доброй Надежды, а второй — мыс Горн.

Дядя. Вот именно. Один держал путь на восток, другой — на запад, и оба ехали кругом земного шара.

Я (*быстро*). Не зайдете ли, господа, завтра посидеть с нами вечерок? Поговорили бы о ваших странствованиях, сыграли бы в вист и...

КАПИТАН ПРАТ. В вист? Вы, верно, забыли, что завтра воскресенье. В другой день я готов...

КЭТ. Да что вы? Роберт не такой уж грешник. Ведь воскресенье-то сегодня!

Дядя. Ну, конечно.

КАПИТАН СМИСЕРТОН. О чем тут спорить, господа. Да ведь вчера же было воскресенье!

Дядя. Воскресенье сегодня. Не понимаю, как можно этого не знать!

КАПИТАН ПРАТ. Ничуть не бывало! Воскресенье завтра!

КАПИТАН СМИСЕРТОН. Да вы, господа, с ума сошли, право! Воскресенье было вчера — я так же уверен в этом, как и в том, что сижу здесь перед вами!

КЭТ (*громко*). Ну, дедушка, теперь вы попались! Капитан Смисертон утверждает, что воскресенье было вчера — и он прав. Кузен Бобби, вы и я утверждаем, что воскресенье сегодня — и мы правы. Капитан Прат заявляет, что воскресенье завтра — и он тоже прав. Мы все правы, и вот вам три воскресенья на одной неделе!

КАПИТАН СМИСЕРТОН (*после паузы*). Кэт рассудила правильно. Какие мы с тобою дураки, Прат! Дело, видите ли, вот в чем, м-р Ремгеджер. Земля имеет в окружности, как вы знаете, 24 тысячи миль и обрывается вокруг оси с запада на восток, делая полный оборот в 24 часа.

На один час приходится, следовательно, тысяча миль. Так ведь? Дядя. Разумеется, так.

КАПИТАН СМИСЕРТОН. Теперь вообразите, что я отплываю на тысячу миль к востоку отсюда. Легко понять, что я должен буду увидеть восход солнца ровно на час раньше, нежели вы здесь, в Лондоне. Если я в том же направлении проеду еще тысячу миль, то увижу солнце на два часа раньше вас; еще через тысячу миль — на три часа и т. д., пока не объеду кругом всего земного шара и снова не вернусь сюда. И здесь, проехав 24 тысячи миль, я увижу восход солнца на целые сутки раньше, нежели вы; другими словами — я буду считать на одни сутки меньше, нежели вы. Другое дело капитан Прат: проехав тысячу миль к западу, он видел восход солнца часом позднее вас; а проехав все 24 тысячи миль, отстал от Лондона в счете времени на целые сутки. И вот почему для меня воскресенье было вчера, для вас — сегодня, а для м-ра Прата — будет завтра. Очевидно, мы все правы, и нет оснований считать, что кто-нибудь из нас более прав, нежели другие.

Дядя. И то правда! Ну, Кэт и Бобби, торжествуйте, я попался. Но я никогда не изменяю своему слову. И если три воскресенья случились на одной неделе, то знай, мальчуган, что можешь получить приданое и все прочее, когда хочешь. Дело в шляпе, черт побери!

На этом рассказ По кончается. Выходит, стало быть, что на одной неделе возможны три воскресенья сряду. На самом же деле моряки провели упрямого дядю, который, вероятно, не слишком силен был в астрономии. Объяснения капитана Смисертонна совершенно правильны, но он умолчал об одном важном обстоятельстве: о поправке календаря при пересечении демаркационной линии. Пересекая ее на своих судах во время плавания, капитан Прат должен был один день считать дважды, а капитан Смисертон — один день пропустить; вследствие этого восстановилось бы единство времяисчисления.

Так что в конце концов более одного воскресенья на одной неделе быть не может.

Задача 3-я.

Определение направления с помощью карманных часов

С помощью карманных часов в солнечный день можно определить всегда с достаточной для житейской практики точностью все четыре стороны света, т.е. точки севера, юга, востока и запада горизонта.

Решение

Способ этот настолько прост и легко объясним, что остается только удивляться, как он не получил еще всеобщего распространения. Определение направления заключается в следующем.

Повернуть циферблат часов, держа их горизонтально так, чтобы часовая стрелка была направлена в сторону солнца. Тогда точка на окружности циферблата, лежащая посередине между показанием часовой стрелки в этот момент и числом XII, покажет вам направление к югу.

Правило можно сформулировать и так:

Найти на окружности циферблата среднюю точку между показанием часовой стрелки и точкой XII часов; направить эту среднюю точку к солнцу — тогда точка циферблата с отметкой XII часов и укажет южное направление.

Поясним это правило в общем виде.

Для доказательства стоит только вспомнить, что в 12 часов (полдень) солнце, часовая стрелка и точка на циферблате, отмеченная цифрой XII, — все они лежат в одной линии, направленной к югу («на полдень»). Вслед за тем и солнце, и часовая стрелка двигаются в одинаковом направлении. Но стрелка часов совершает свой полный оборот в 12 часов, а солнце в 24 часа, т. е. вдвое больший промежуток времени. Отсюда и вытекают данные выше правила.

Замечание. Само собою разумеется, что полученное указанным путем определение направления не будет вполне точно. Ошибка получается потому, что мы помещаем часы в *плоскости горизонта вместо плоскости эклиптики*, и кроме того, не принимается во внимание разница между **истинным** солнечным временем и так называемым **средним** временем. Но для тех чисто практических целей, которые преследуются при применении указанного выше правила, получаемые результаты совершенно достаточны.

Если бы вместо северного мы находились на южном полушарии Земли, то указанное выше правило соответственно видоизменялось бы — а именно в этом случае:

Если точку, обозначенную на циферблате часов числом XII, повернуть к солнцу, то равноделящая угла между показанием часовой стрелки и точкой с числом XII покажет направление к северу.

ХИТРЫЕ ЗАДАЧИ



Задача 4-я. **Сколько воды в бочке?**

Двое заспорили о содержимом бочки. Один спорщик говорил, что воды в бочке более чем наполовину, а другой утверждал, что меньше. Как убедиться, кто прав, не употребляя ни палки, ни веревки, ни вообще какого-либо приспособления для измерения?

Решение

Это не задача-шутка, а настоящая геометрическая задача, хотя и решается до смешного просто.

Если бы вода в бочке была налита ровно до половины, то, наклонив бочку так, чтобы уровень воды пришелся как раз у края бочки, мы увидели бы, что высшая точка дна находится также на уровне воды. Это ясно из того, что плоскость, проведенная через диаметрально противоположные точки верхней и нижней окружностей бочки, делит ее на две равные части. Если вода налита менее чем до половины, то при таком же наклонении бочки должен выступить из воды больший или меньший сегмент дна. Наконец, если в бочке более чем половина, то при наклонении верхняя часть дна окажется под водой.

Задача 5-я. **Крест обратить в квадрат**

Крест, составленный из пяти квадратов, требуется разрезать на такие части, из которых можно было бы составить один равновеликий кресту по площади квадрат.

Решение

На прилагаемых чертежах читатель найдет два решения этой задачи: одно старое (рис. 2) и одно, предложенное в новейшее время (рис. 3). Второе решение столь же просто, сколь и остроумно: задача решается проведением всего двух прямых линий.

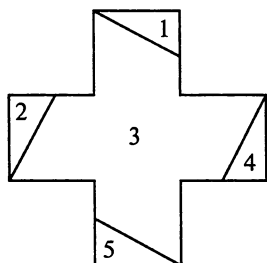


Рис. 2

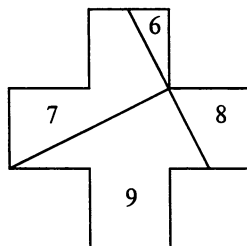
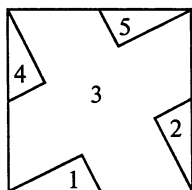
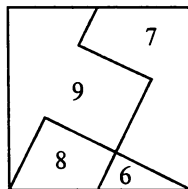


Рис. 3

**Задача 6-я.****Коврик**

У одной дамы был прямоугольный ковер размерами 36×27 дюймов. Два противоположных угла его истрепались — пришлось их отрезать в виде треугольных лоскутков, затусованных на нашем чертеже (рис. 4). Но даме все же хотелось иметь ковер в форме прямоугольника. Она поручила обойщику разрезать его на такие две части, чтобы из них можно было сшить прямоугольник, не теряя, конечно, ни кусочка материи. Обойщик исполнил желание дамы. Как ему удалось это сделать?

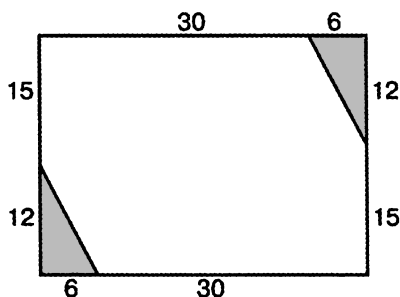


Рис. 4

Решение

Решение задачи видно из прилагаемого чертежа (рис. 5).

Если зубчатую часть А вынуть из части В и затем снова вдвинуть ее между зубьев части В, переместив на один зуб вправо, то получится безукоризненный прямоугольник.

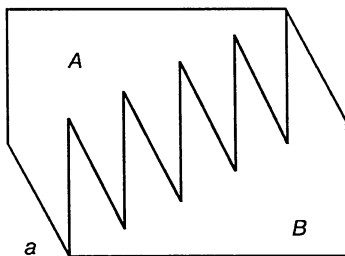


Рис. 5

Задача 7-я.**Оригинальное доказательство**

Всякий, проходивший геометрию, знает, что сумма углов треугольника равна 180° , т.е. двум прямым углам.

Но мало кому известно, что эта основная теорема, на которой зиждется все тройное Евклидово здание, может быть «доказана» с помощью простого лоскутка бумаги.

Мы ставим слово «доказана» в кавычках, потому что, собственно говоря, это не доказательство в строгом смысле слова, а скорее лишь наглядная демонстрация. Но все же этот остроумный прием очень любопытен и поучителен.

Вырезают из бумаги любой формы треугольник ABC и отрезают его углы по пунктирным линиям (рис. 6). Затем эти углы своими вершинами прикладывают к точке M и получают прямоугольник $OPRT$. Так мы наглядно убеждаемся, что все три угла треугольника ABC , т.е. (1, 2, 3), составляют в сумме два прямых угла AMC и AMB .

Для знающих геометрию этот прием представляет интересную задачу — объяснить, почему такие операции с бумажным треугольником всегда дают желаемый результат. Объяснить это нетрудно, и мы предлагаем читателю удовольствие самому подыскать геометрическое основание этого приема.

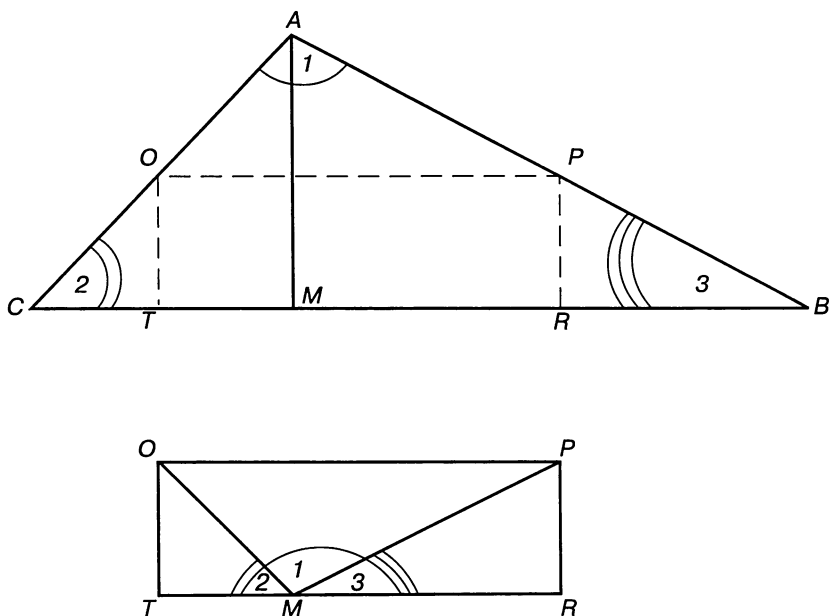


Рис. 6

Задача 8-я.

Вычерчивание циркулем овальных линий

Решение

Для вычерчивания на плоскости замкнутых овальных кривых, известных под именем эллипсов, существует специальный прибор, так называемый эллипсограф. Но можно получать овалы правильной формы и без этого сложного и дорогого прибора — просто с помощью циркуля, если только прибегнуть к небольшому ухищрению, о котором дает понятие рисунок 7.

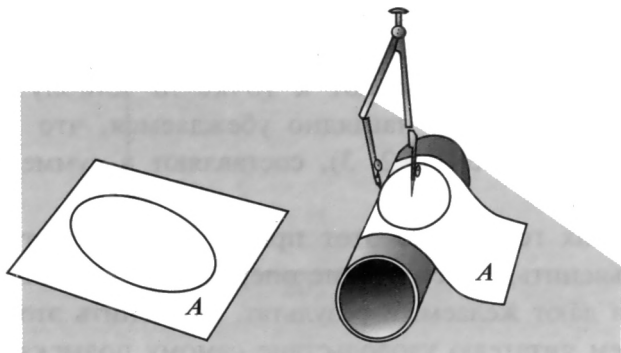


Рис. 7

Обвернув цилиндр листом бумаги и начертив циркулем замкнутую кривую на этой цилиндрической поверхности, получим, развернув затем листок, что начертили не круг, а овал, тем более вытянутый, чем меньше радиус цилиндра по сравнению с раствором циркуля.

Таким практическим способом вычерчивания овалов часто пользуются в различных мастерских, хотя среди чертежников и рисовальщиков он сравнительно мало известен.

Следует иметь в виду, однако, что получаемый таким приемом овал не есть, вообще говоря, эллипс в собственном смысле этого слова, как бы велико ни казалось сходство. Получаемый овал есть кривая пересечения шара и цилиндра, т.е., говоря математически, кривая 4-го порядка.

Нетрудно убедиться также в том, что вычертить сплошной овал указанным путем возможно только в том случае, если радиус взятого цилиндра больше половины раствора циркуля.

Задача 9-я. Теорема Пифагора

Посредством плиток домино доказать пифагорову теорему¹.

Решение

Сложим плитки домино так, как показано на рисунке 8. Квадрат, построенный на гипотенузе, состоит из 25 мелких квадратов, а квадраты, построенные на катетах, — соответственно из 9 и 16 таких же мелких квадратов. А так как $25 = 9 + 16$, то теорема «доказана» (прямоугольность треугольника повторяется прямым углом какой-нибудь костяшки или группы их).

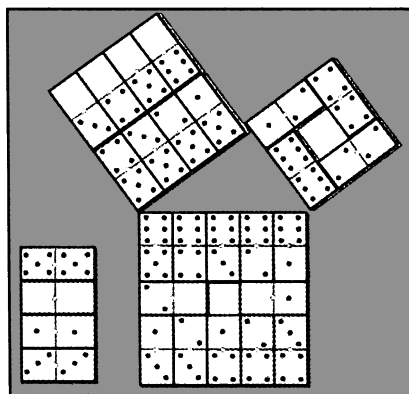


Рис. 8

¹То есть что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Само собой разумеется, что это не доказательство, а лишь наглядная иллюстрация, да и то пригодная лишь для тех случаев, когда все три стороны прямоугольного треугольника выражаются целыми числами. В данном случае для сторон треугольника имеем числа 3, 4 и 5. Таких чисел, впрочем, есть сколько угодно, как читатель может убедиться из пояснений к следующей задаче.

Задача 10-я.

Египетская задача

С помощью веревки в 12 единиц длины построить прямоугольный треугольник.

Решение

Задача эта известна издревле также под названием «правила веревки». На веревке отмеривались три последовательных отрезка длиной в 3, 4 и 5 единиц длины. Если теперь соединить концы этой веревки и натянуть ее на третьем и седьмом делении, то получится прямоугольный треугольник (рис. 9).

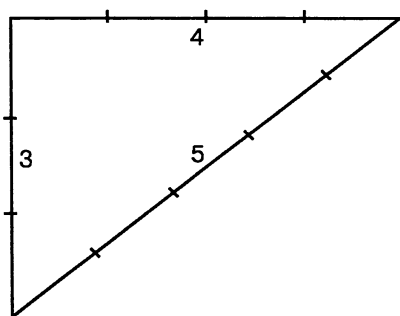


Рис. 9

Приемом этим пользовались еще древние египтяне при постройке пирамид. Быть может, поэтому египетское слово для названия землемеров в дословном переводе значит «вытягиватель веревки». Нынешние землемеры для получения прямого угла иногда также прибегают к подобному приему, отмечая на своих землемерных цепях такую комбинацию из трех целых чисел, которая выражала бы длины сторон прямоугольного треугольника с соизмеримыми сторонами.

Числа эти должны удовлетворять условию пифагоровой теоремы, т.е. сумма квадратов двух из них должна быть равна квадрату третьего числа. Взятые выше целые числа 3, 4, 5 удовлетворяют этому условию: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Подобных чисел можно найти сколько угодно.

Замечание. Все эти так называемые пифагоровы числа заключаются в тождественном равенстве, которое каждый легко может проверить:

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 = a^2 b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2.$$

Здесь ab и $\frac{a^2 - b^2}{2}$ катеты, а $\frac{a^2 + b^2}{2}$ соответствующая им гипотенуза.

Если вместо a и b подставлять два любых нечетных и первых между собой числа, то получаются различные требуемые треугольники, и притом такие, что стороны одного не будут кратными сторонами другого какого-либо треугольника.

Такие же пифагоровы числа можно получать и на основании тождества $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$, подставляя сюда вместо m и n какие угодно целые числа. Если же избежать кратных групп или повторения вида треугольников, то числа надо брать первые между собой и одно четное, а другое нечетное.

Перед вами табличка первых троек пифагоровых чисел, решающих египетскую задачу: $x^2 + y^2 = z^2$

3,	4,	5
5,	12,	13
7,	24,	25
9,	40,	41
11,	60,	61
13,	84,	85
15,	8,	17
15,	112,	113
17,	144,	145
19,	180,	181
21,	20,	29
27,	36,	45
33,	56,	65
35,	12,	37
39,	80,	89
45,	28,	53
45,	108,	117
51,	140,	149

55, 48, 73
57, 176, 185
63, 16, 65
65, 72, 97
75, 100, 125
77, 36, 85
85, 132, 157
91, 60, 109
95, 168, 193
99, 20, 101
и т.д.

Замечание. Упоминание о египетском треугольнике, сделанное в задаче, заставляет нас совершить экскурсию в область истории. Можно считать несомненно установленным, что древние египтяне обладали знанием многих математических фактов и умением производить некоторые математические действия настолько давно, насколько только можно проникнуть в глубину веков этой древнейшей цивилизации на земле. Пифагорова теорема в приложении к равнобедренным прямоугольным треугольникам (оба катета равны) была известна им с незапамятных времен. Треугольником со сторонами 3, 4 и 5 пользовались строители древнейших пирамид и храмов для получения прямого угла. Один из дошедших до нас в XIX веке египетских папирусов писан за 1700 лет до Р. Х. на основании египетских же записей за 3000 лет и более до Р. Х., т.е. почти за шесть с половиной тысяч лет. В нем уже содержатся некоторые арифметические задачи, таблица дробей и решение простейших уравнений, где неизвестное обозначается знаком хау (хип). Существует мнение, будто арифметика (особенно начатки ее) есть самый старейший из членов великой семьи математических наук. Начала алгебры и геометрии также скрываются в таинственном мраке доисторических судеб человечества, где люди уже считают, решают уравнения 1-й степени и прилагают простейшие случаи пифагоровой теоремы.

Задача 11-я.

Численный круг пифагорейцев

Будем писать по кругу ряд последовательных чисел от 1 до какого-либо числа, т.е. ряд чисел 1, 2, 3, 4,..., n . Дойдя до этого наперед заданного себе числа n , продолжаем писать по кругу те же числа, но в обратном уменьшающемся порядке, пока не напишем опять единицу, — т.е. напишем: $n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$. Тогда сумма всех чисел, написанных в круге, дает квадрат числа n (т.е. число n , умноженное само на себя).

Так, например, если требуется найти квадрат 7, то (рис. 10):



Рис. 10

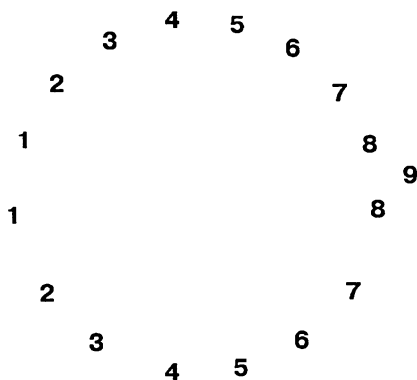


Рис. 11

Сложив все числа этого круга, действительно получим:
 $49 = 7^2$.

Для числа, например, 9 нужен круг (рис. 11), сумма чисел которого равна $9^2 = 81$ и т. д.

Замечание. Для какого бы то ни было числа n этот пифагорейский круг представляется в виде:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & & & & \end{array} \bigg\rangle n.$$

То есть получается два одинаковых ряда последовательных чисел от 1 до $n - 1$, и к сумме обоих этих рядов надо прибавить еще число n .

Но сумма $n - 1$ последовательных чисел, начиная с единицы, равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, для суммы таких рядов и числа n имеем равенство:

$$n(n-1) + n = n^2,$$

что и доказывает задачу о пифагорейском круге.

Замечание. Для желающих несколько более углубиться в сущность пифагорейского круга сделаем еще несколько дополнений. Обозначим через S_n сумму последовательных чисел от 1 до n . Тогда доказанное выше предложение выразится формулой:

$$2S_{n-1} + n = n^2 \quad (1)$$

Рассматривая ряд целых чисел, находим, что для числа 2, $S_{n-1} < n$; для числа 3, $S_{n-1} = n$, а для всех остальных чисел $S_{n-1} > n$. Итак, можно высказать такое предположение:

Если квадрат целого числа (кроме 2 и 3) разделим на сумму всех последовательных чисел до этого числа, то в частном будет 2, а в остатке само число.

Подобно формуле (1) можно написать еще ряд равенств:

$$\begin{array}{rcl} 2S_{n-2} + n - 1 & = & (n - 1)^2 \\ 2S_{n-3} + n - 2 & = & (n - 2)^2 \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ 2S_2 & + & 3 = 3^2 \\ 2S_1 & + & 2 = 2^2 \\ & & 1 = 1^2 \end{array}$$

Складывая все эти равенства с (1) и означая для краткости

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = (S_n)^2,$$

получаем:

$$2(S^1 + S^2 + S^3 + \dots + S_n - 1) + S_n = (S_n)^2,$$

Что тоже можно написать в виде пифагорейского круга:

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & & \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & \rangle & S_n \end{array}$$

где сумма всех членов дает $(S_n)^2$.

Задача 12.

Земля и апельсин

В предлагаемой ниже интересной задаче мы впервые встречаемся с числом, выражающим отношение длины окружности к диаметру. Это знаменитое так называемое «иррациональное» число имеет свой особый смысл. Оно изображается греческой буквой π (пи). Приблизительно

$$\pi = 3,1415926...$$

В настоящей книге нам не раз еще придется говорить об этом числе, поэтому укажем еще два правила, которые позволят записать в случае необходимости больше десятичных знаков:

1) Вот и Лена и Анюта прибежали Пи узнать число они желали. Здесь количество букв в слове соответствует значимой цифре, т.е. 3,1415926536.

2) Гордый Рим трубил победу над твердыней Сиракуз, но трудами Архимеда много больше я горжусь: чтобы нам не ошибиться и окружность верно счесть... три четырнадцать пятнадцать девяносто два и шесть, т.е. 3,1415926.

Иногда число Пи называют числом Архимеда, жившего в г. Сиракузы на острове Сицилия, хотя самому Архимеду удалось подсчитать

Пи как дробь $\frac{22}{7}$.

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 см. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, — останется некоторый прозор (промежуток). Спрашивается: в каком случае этот прозор будет больше — у земного шара или апельсина?

Решение

Обыкновенно на этот вопрос отвечают так: «Конечно, у апельсина останется больший прозор, нежели у Земли! Ведь по сравнению с окружностью земного шара — 38 000 верст ($\approx 40\,000$ км) — какой-нибудь один сантиметр есть столь ничтожная величина, что прибавка ее останется совершенно незаметной. Другое дело апельсин: по сравнению с его окружностью 1 см — огромная величина, и прибавка к длине окружности должна быть весьма ощутительна». Такой ответ, естественно, навязывается уму всякого — и математика, и

нематематика. Математик еще подкрепит его геометрическими соображениями вроде следующего: «Так как отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, то приращение радиуса Земли (т.е. прозор) должен быть во столько раз меньше приращения радиуса апельсина, во сколько раз радиус земного шара больше радиуса апельсина» и т.д.

Но все эти рассуждения — одно только лукавое мудрствование. Простым вычислением легко доказать, что именно ввиду постоянства отношения окружности к диаметру прозор совершенно не зависит от радиуса окружности и должен быть одинаков у Земли и апельсина.

В самом деле, пусть окружность экватора равна C сажениям, а окружность апельсина — c . Тогда радиус Земли $R = \frac{C}{2\pi}$, а радиус апель-

сина $r = \frac{c}{2\pi}$. После прибавки к обручам одного сантиметра окружности их будут равны: Земли — $C + 1$, апельсина — $c + 1$; радиусы же их будут: Земли $\frac{C+1}{2\pi}$, апельсина — $\frac{c+1}{2\pi}$. Если из новых радиусов вычтем прежние, то получим в обоих случаях одно и то же приращение:

$$\frac{C+1}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ сантиметра для земли,}$$

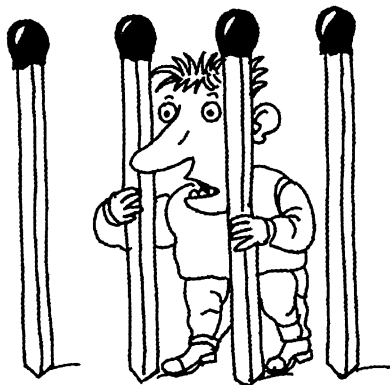
$$\frac{c+1}{2\pi} - \frac{c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ сантиметра для апельсина.}$$

Итак, у Земли и у апельсина получится один и тот же прозор в $\frac{1}{2\pi}$ сантиметра, т.е. примерно в 1,6 миллиметра.

Этот результат кажется до такой степени неожиданным и неправдоподобным, что нам случалось видеть людей, которые, сами получив его, все же в него не верили: они проделывали с помощью бечевки ряд обмеров и опытов с монетами, тарелками и другими круглыми предметами, — и лишь тогда успокаивались, когда воочию убеждались, что опыт подтверждает их вычисления. А один математик так даже формулировал нам свой ответ на вопрос буквально в следующих выражениях: «Прозор для Земли должен, конечно, быть меньше, чем для апельсина, хотя геометрически, казалось бы, они должны быть одинаковы». Чудак больше верил «здравому смыслу», чем математическим выкладкам, которые, к слову сказать, он проделал безукоризненно. Оно, пожалуй, и понятно: трудно найти более разительный пример геометрического парадокса (не софизма, а именно парадокса, т.е. неправдоподобной с виду истины), чем эта задачка о Земле и апельсине.

ЗАДАЧИ И РАЗВЛЕЧЕНИЯ

СО СПИЧКАМИ



Во второй книге наших рассказов и математических задач уже были указаны некоторые простейшие математические задачи и игры со спичками. Приводим здесь еще несколько простых и интересных задач и развлечений этого рода. Начнем с незамысловатых задач на переложение спичек.

Задача 13-я.

Этот дом составлен из 10 спичек (рис. 12). Требуется повернуть его к нам другой стороной, передвинув только 2 спички.

Решение

Ответ ясен из рисунка 13, который получается из предыдущего, если в крыше дома приопустить одну спичку и приподнять другую.

Задача 14-я.

Весы составлены из 9 спичек и не находятся в состоянии равновесия (рис. 14). Требуется переложить в них 5 спичек так, чтобы весы были в равновесии.

Решение

Дается рисунком 15.

Задача 15-я.

Этот греческий храм (рис. 16) построен из 11 спичек. Требуется переложить 4 спички так, чтобы получилось 11 квадратов.

Решение

Смотри рисунок 17.

Задача 16-я.

В памятнике, составленном из 12 спичек (рис. 18), требуется переложить 5 спичек так, чтобы получилось 3 квадрата.

Решение

Ясно из рисунка 19.

Задача 17-я.

Две рюмки (рис. 20) составлены из 10 спичек. Переложить в них 6 спичек так, чтобы получился дом.

Решение

Смотри рисунок 21.

Задача 18-я.

Флюгер (рис. 22) составлен из 10 спичек. Переложить 4 спички так, чтобы получился дом.

Решение

Смотри рисунок 23.

Задача 19-я.

Вот фонарь (рис. 24) и вот топор (рис. 25). Каждый из них составлен из 9 спичек. Переложить в фонаре 6 спичек и получить 4 рав-

ных треугольника, составляющих, в свою, очередь четырехугольник. Переложить в топоре 4 спички так, чтобы получилось 3 равных треугольника.

Решение

Из фонаря получается фигура на рисунке 26.

Из топора получается фигура на рисунке 27.

Задача 20-я.

В этой лампе, составленной из 12 спичек (рис. 28), переложить 3 спички так, чтобы получить 5 равных треугольников.

Решение

Смотри рисунок 29.

Задача 21-я.

Из 10 спичек сделать ключ (рис. 30). Переложить в нем 4 спички так, чтобы получилось 3 квадрата.

Решение

Смотри рисунок 31.

Задача 22-я.

У звезды, составленной из 12 спичек (рис. 32): а) переложить 4 спички так, чтобы получился четырехконечный крест, б) в полученном кресте переложить 8 спичек так, чтобы получить крест, состоящий из 4 крестов, с) в этом последнем кресте переложить 8 спичек так, чтобы получилось 4 квадрата, d) наконец, переложить 8 спичек так, чтобы получилась мельница.

Решение

Все требуемые решения означены соответствующими буквами *a*, *b*, *c* и *d* на рисунке 33.

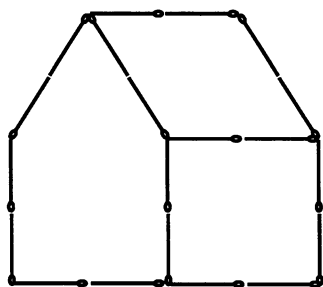


Рис. 12

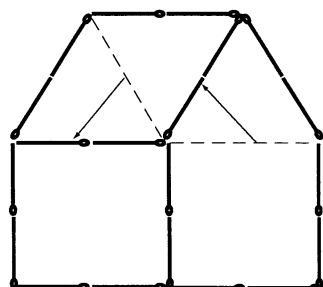


Рис. 13

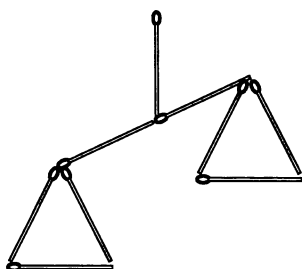


Рис. 14

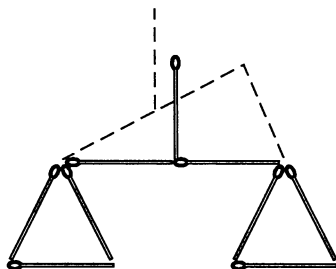


Рис. 15

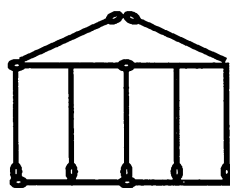


Рис. 16

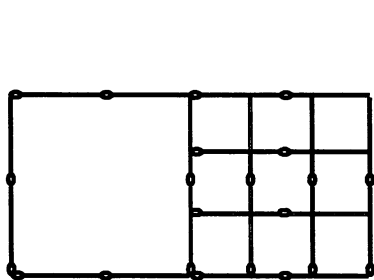


Рис. 17

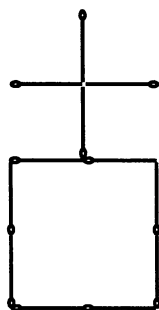


Рис. 18

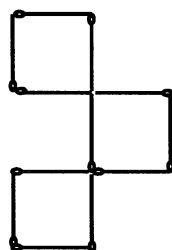


Рис. 19

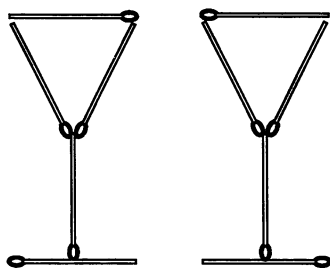


Рис. 20

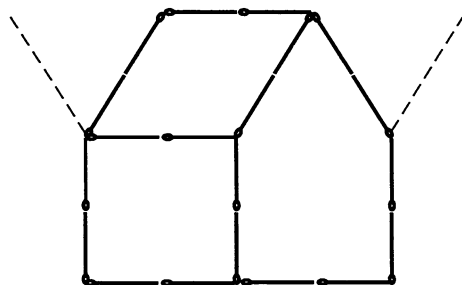


Рис. 21

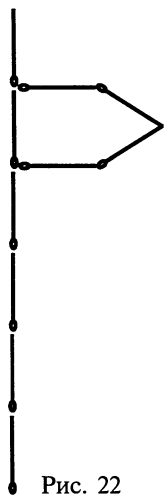


Рис. 22

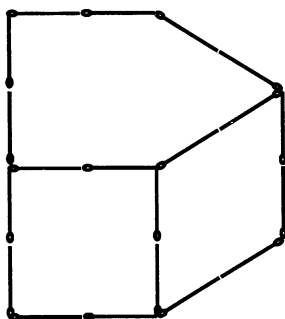


Рис. 23

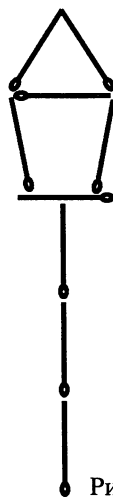


Рис. 24

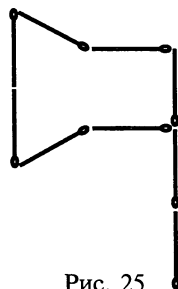


Рис. 25

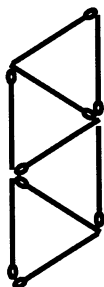


Рис. 26

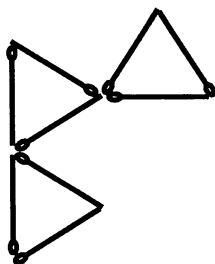


Рис. 27

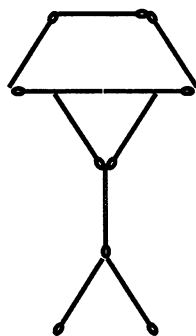


Рис. 28

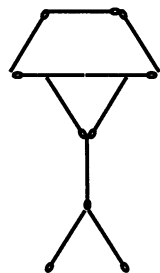


Рис. 29

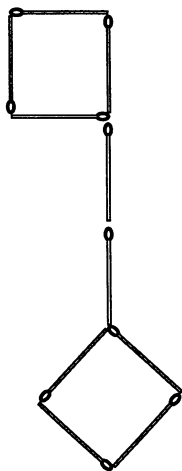


Рис. 30

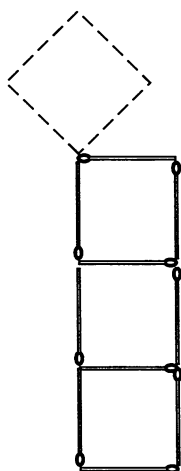


Рис. 31

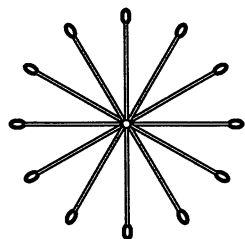


Рис. 32

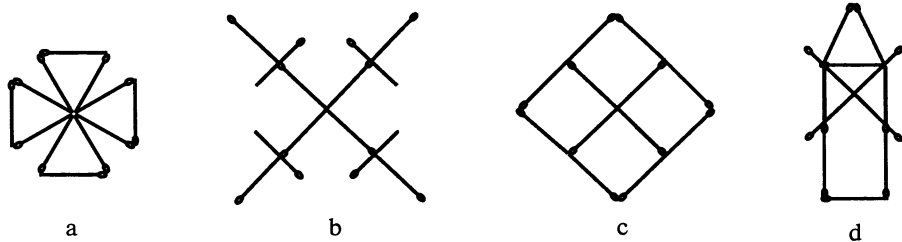


Рис. 33

Задача 23-я.**Дележ сада**

Изгородь квадратного сада составлена 16 спичками (рис. 34). В ней находится дом, представленный квадратом из 4 спичек. Требуется разделить сад (без дома) между пятью наследниками при помощи 10 спичек так, чтобы каждый получил части, одинаковые по величине и форме.

Решение

Смотри рисунок 35.

Предложенную задачу можно видоизменить и так: 4 брата получили от дяди в наследство сад (обнесенный 16 спичками), в котором находится 12 плодовых деревьев (монеты или пуговицы), расположенных, как указано на рисунке 36. Требуется 12 спичками разделить сад на 4 равные части одинаковой формы, содержащие по равному числу деревьев.

Решение

Смотри на рисунке 37.

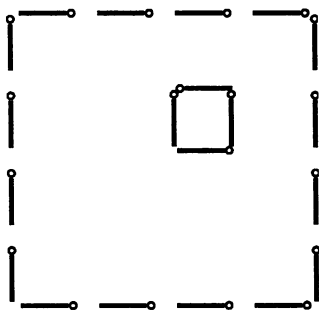


Рис. 34

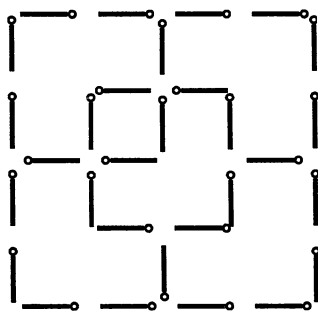


Рис. 35

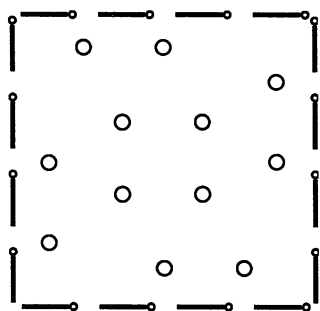


Рис. 36

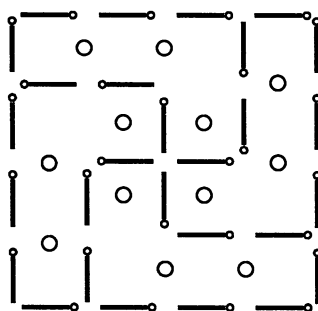


Рис. 37

Задача 24-я. Сообразите-ка!

Кладут произвольное, не очень малое, количество спичек в ряд, надписывают над 9 спичками, следующими друг за другом, числа от 1 до 9 и просят кого-нибудь из присутствующих заметить одно из этих 9 чисел. В уме выбирают какое-нибудь, не особенно малое, число (например 23) и считают от 9 далее вправо 10, 11, 12, и т.д. до 23; если ряд оканчивается, продолжают счет, переходя к началу ряда (у нас придется считать до спички, помеченной 4). Теперь просят считать подобным образом другого от замеченного им числа вправо до 23; в то же время сообщите ему, что когда он назовет число 23, то укажет на спичку 4.

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Задача 25-я. Расстановка часовых

Вдоль стен квадратного бастиона требовалось поставить 12 часовых. Полковник разместил их, как указано на рисунке (рис. 38), по 4 с каждой стороны. Затем пришел комендант и, недовольный размещением часовых, распорядился расставить солдат так, чтобы с каждой стороны было по 5. Вслед за комендантом пришел генерал, рассердился на коменданта за его рас-

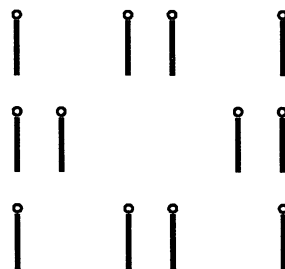


Рис. 38

поряжение и разместил солдат по 6 человек с каждой стороны. Каково было размещение в двух последних случаях?

Решение

Решения даются размещениями *a* и *b* на рис. 39.

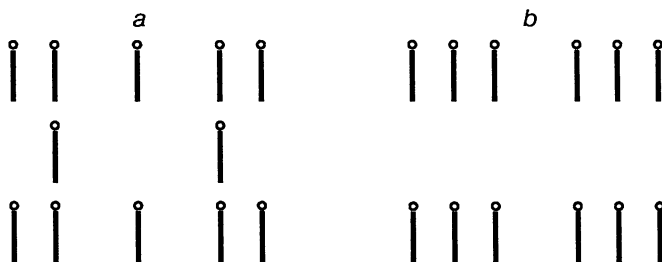


Рис. 39

Задача 26-я.

Хитрецы

В корчме стояло 4 стола, образуя четырехугольник. Проголодавшиеся возвращавшиеся с маневров солдаты остановились там в числе 21 человека пообедать и пригласили к обеду и хозяина. Расселись все так: за тремя из столов сели солдаты по 7 за каждым столом (рис. 40), а за четвертым столом сел хозяин. Солдаты уго-

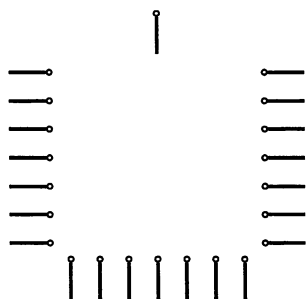


Рис. 40

ворились с хозяином, что платить по счету будет тот, кто останется последним при следующем условии: считая вкруговую (по часовой стрелке) всех, в том числе и хозяина, освобождать каждого седьмого. Каждый освобожденный уходил из корчмы, и последним остался сам хозяин. С кого начали счет?

С кого нужно было бы начать, если бы солдат было только по 4 за каждым из трех столов?

Решение

Надо начинать счет с шестого солдата, сидящего по левую руку от хозяина. Во втором же случае — с пятого из солдат направо от хозяина.

Задача 27-я.

Угадай-ка!

Предложите кому-либо взять в каждую руку по равному какому угодно числу спичек (или каких-либо иных предметов). Это число вам неизвестно. Предложите партнеру переложить из правой руки в левую то число предметов, которое вы ему скажете (например, число a). Затем, ничего не показывая и не говоря вам, пусть он отложит из левой руки столько спичек, сколько у него осталось в правой, и, наконец, опять-таки ничего вам не показывая, пусть отложит в сторону все спички из правой руки. Теперь вы можете смело утверждать, что у вашего партнера осталось в левой руке всего $2a$ спичек.

Например: Пусть партнер возьмет по 15 спичек в каждую руку. Вы требуете, чтобы в левую руку из правой он переложил, например, 10 спичек (значит, у него в правой осталось 5 спичек, а в левой 25). Затем по вашему требованию он из левой перекладывает в правую столько спичек, сколько там есть (т.е. в правой у него станет $5+5=10$ спичек), и все эти спички откладывает. Вы и «угадываете», что в левой руке у него должно остаться $2 \times 10 = 20$ спичек.

Решение

Общее решение этой задачи может найти каждый. Пусть только он проследит, что в сущности делается при последовательном переложении и откладывании спичек. Пусть у партнера в руках по n спичек, и вы говорите ему переложить из правой руки в левую a спичек.

Получается:

I. В обеих руках по n спичек.

II. В левой $n + a$, в правой $n - a$ спичек.

III. В левой $(n + a) - (n - a) = 2a$ спичек, из правой все спички откладываются. Итак, всегда в левой руке получится в конце концов удвоенное число тех спичек, которые вы сказали переложить в первый раз.

Задача 28-я.

Верная отгадка

Иван берет в одну руку четное, а в другую нечетное число спичек. Петр предлагает ему помножить число спичек в правой руке на нечетное число, а число спичек в левой руке — на четное и сказать ему сумму полученных произведений. Вслед за тем он уга-

дывает, в какой руке у Ивана четное и в какой нечетное число спичек. Как он это делает?

Решение

Если названная сумма — число четное, то у Ивана в правой руке четное число спичек и в левой — нечетное. Если же эта сумма нечетная, то в правой руке нечетное число спичек.

Задача 29-я. Собрать в группы по 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 | | | | | | | | | |

10 спичек положены в один ряд. Требуется распределить их попарно, всего в 5 пар, перекладывая по одной спичке через две (например, 1 переложить к 4 и т.д.).

Решение

Можно перекладывать так:

4 к 1
 7 к 3
 5 к 9
 6 к 2
 8 к 10

или:

7 к 10
 4 к 8
 6 к 2
 1 к 3
 5 к 9

Задача 30-я. Собрать в группы по 3

15 спичек лежат в ряд:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
 | | | | | | | | | | | | | | |

Требуется собрать их в 5 групп (или кучек) по 3 спички в каждой, причем перекладывать спички по одной и каждый раз перескакивать через 3 спички.

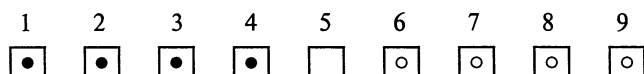
Решение

Обозначим положенные в ряд спички соответственно числами 1, 2, 3,..., 15. Тогда задача решается путем следующих 12 переложений:

2 на 6
1 на 6
8 на 12
7 на 12
9 на 5
10 на 5

4 между 5 и 6
3 между 5 и 6
11 между 5 и 6
13 на 11
14 на 11
15 на 11

Задача 31-я. Перемещение лошадей



В конюшне устроено 9 стойл в ряд. Пятый номер не занят: в номерах 1, 2, 3 и 4 находятся черные лошади (копейки), а в 6, 7, 8 и 9 — белые лошади (гривенники или иные предметы). Требуется перевести белых лошадей в 1, 2, 3 и 4 номера, а черных в 6, 7, 8 и 9 на следующих условиях: каждая лошадь может перескакивать в ближайшее стойло или соседнее с ним, но не дальше; никакая лошадь не должна возвращаться на прежнее место, и в каждом стойле не может быть больше одной лошади. Начинать с белой лошади.

Решение

Задача решается в 24 хода следующими перемещениями:

6 в 5	2 в 4	4 в 6
4 в 6	1 в 2	2 в 4
3 в 4	3 в 1	3 в 2
5 в 3	5 в 3	5 в 3
7 в 5	7 в 5	7 в 5
8 в 7	9 в 7	6 в 7
6 в 8	8 в 9	4 в 6
4 в 6	6 в 8	5 в 4

Задача 32-я. Поднять одной спичкой 15 спичек

Решение

Эта на первый взгляд трудная задача решается, однако, легко. Положим на стол спичку А (рис. 41), а поперек этой спички положим затем плотную одну около другой, попеременно вправо и влево, 14 спичек, и

именно так, чтобы их головки выдавались на $1 - 1\frac{1}{2}$ сантиметра над A , в то время как концы без головок опирались бы на стол. Сверху в углубление, образуемое верхними частями спичек, кладут затем 16-ю спичку параллельно A . Если поднять теперь последнюю за конец, то, к нашему удивлению, вместе с ней поднимутся и остальные 15 спичек (рис. 42). Для этого опыта удобнее брать большие, толстые четырехугольные спички.

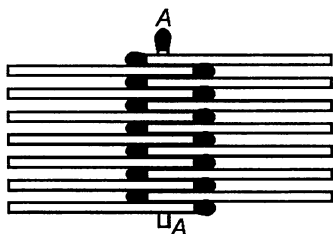


Рис. 41

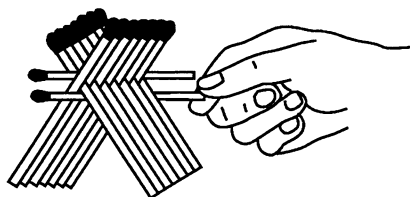


Рис. 42

Задача 33-я. Спичечный телеграф

Спичечный телеграф строится, как указано на рисунке 43. Можно, конечно, удлинить или укоротить его по желанию. Если нажать в B , то A подпрыгнет.

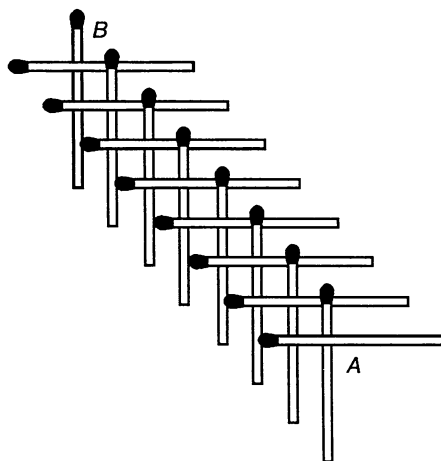


Рис. 43

Задача 34-я. Легко или нет?

В заключение этого небольшого отдела задач со спичками предлагаем вам проделать уже не задачу, а маленькое физическое, что ли, упражнение.

Вот положено на стол 5 спичек, которые предлагаем вам поднять двумя руками так: сперва спичку 1 двумя большими пальцами; оставив ее между этими пальцами, поднять затем двумя указательными пальцами спичку 2; оставляя эти две спички между пальцами, поднимите затем спичку 3 средними пальцами, спичку 4 — безымянными и спичку 5 — мизинцами. У вас должна получиться фигура, как на рисунке 44.

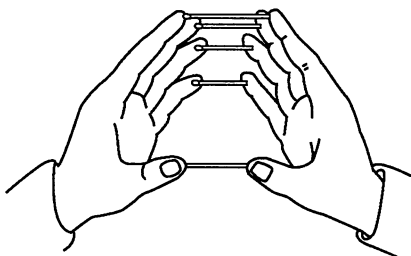
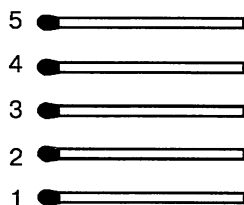


Рис. 44

ЛАБИРИНТЫ



Вот задача, происхождение которой относится к глубокой древности и теряется во мраке легендарных сказаний. Древние — да, пожалуй, многие и теперь — задачу о лабиринтах считали вообще неразрешимой. Человек, попавший в лабиринт, не мог уже из него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь.

В действительности безвыходных лабиринтов нет, разобраться и найти выход из самого запутанного лабиринта не составляет особого труда.

Слово «лабиринт» — греческое и в переводе означает ходы в подземельях. Существует очень большое количество природных подземных пещер с таким огромным количеством по всем направлениям перекрещивающихся коридоров, закоулков и тупиков, что нетрудно в них заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть от голода и жажды.

Примеры такого же рода, но уже искусственных лабиринтов могут представить шахты иных рудников или так называемые катакомбы.

Вероятнее всего, что подобные подземелья возбудили у строителей еще древнейших времен охоту подражать им искусственными сооружениями. И у древних писателей мы встречаем указания на существование искусственных лабиринтов. В конце концов словом «лабиринт» чаще всего обозначали именно искусственное чрезвычайно сложное сооружение, составленное из очень большого числа аллей или галерей, бесчисленные разветвления, перекрестки и тупики которых заставляли попавшего туда бесконечно блуждать в лабиринте в тщетных поисках выхода. Об устройстве таких лабиринтов слагались целые легенды.

Известнее всего рассказ о лабиринте, построенном мифическим Дедалом на острове Крит для мифического же царя Миноса. В центре лабиринта жило чудовище Минотавр, и никто из попавших туда не мог выйти обратно, делаясь в конце концов жертвой чудовища. Семь юношей и семь девушек ежегодно приносили афиняне в дань чудовищу, которое преисправно их пожирало. Наконец Тезей не только убил Минотавра, но и вышел из лабиринта, не заблудившись в нем, при помощи, впрочем, нити клубка царевны Ариадны. С той поры слова «нить Ариадны» имеют символическое значение как способ, дающий выход из самого затруднительного положения.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились еще и запутанно-сложные галереи, и ходы пещер, и архитектурные лабиринты над могилами, и извилистые планы на стенах или полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, и извивающиеся тропинки на почве, и рельефные извилины в скалах.

Рисунками лабиринтов украшались одеяния христианских императоров до IX столетия, и остатки таких же украшений сохранились до сих пор на стенах церквей и соборов того времени. Вероятно, эти украшения служили символом сложности жизненного пути и человеческих заблуждений. Особенно употребительны были лабиринты в первой половине XII столетия.

На рисунке 45 приведено изображение одного из лабиринтов во Франции, в церкви Святого Квентина. Лабиринт этот выложен из камня на полу посреди церкви, и диаметр его равняется 34,5 футам. Путь к центру здесь есть сама линия. Если вести карандашом по линии от точки А (не обращая внимания на внешнюю окружающую лабиринт линию), то вы придете к центру по длинной извилистой дороге через всю внутреннюю площадь, но сомнения относительно выбора пути у вас быть не может. В подобных случаях эти древние духовные лабиринты отличаются вообще не головоломным, а просто продолжительным извилистым путем, который держит вас все время внутри лабиринта.

В церкви аббатства Св. Бертина во Франции есть еще более любопытное изображение подобного рода на полу, представляющее в центре Иерусалимский храм с остановками для пилигримов. Этот лабиринт действительно посещался пилигримами взамен путешествия по обету в святые места. Пройти ползком весь путь лабиринта назначалось также вместо епитимьи.

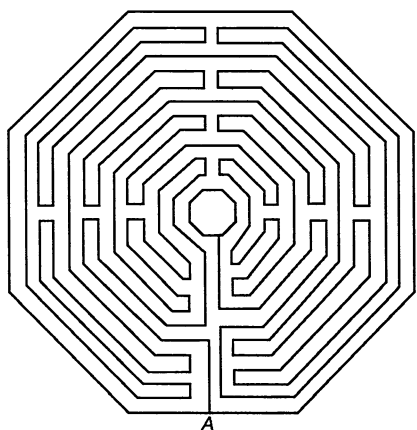


Рис. 45

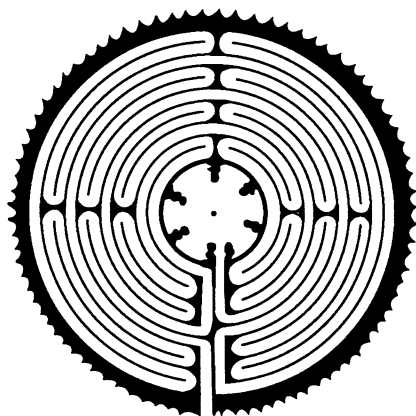


Рис. 46

Лабиринт в Шартрском соборе, изображение которого здесь дано (рис. 46), сорока футов в поперечнике, также посещался кающимися, и они совершали весь его сложный и длинный путь, выполняя наложенную на них епитимью или обет.

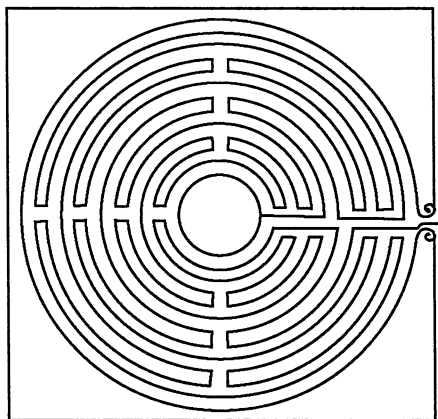


Рис. 47

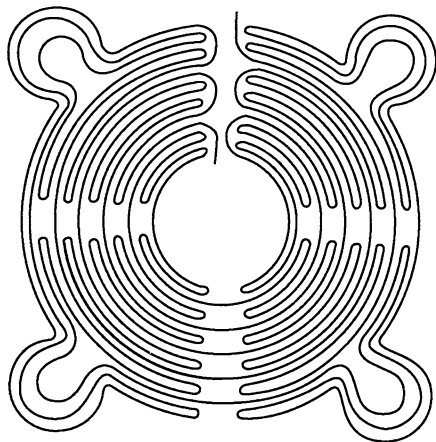


Рис. 48

Подобного же рода лабиринт, но гораздо меньших размеров, помещающийся всего на одной плите пола, есть в кафедральном соборе в Лукке (рис. 47). В натуральную величину он имеет $19\frac{1}{2}$ дюйма в поперечнике.

Другие подобные лабиринты были и, может быть, существуют до сих пор в аббатстве Туссарта в Шалоне-на-Марне, во многих древних соборах и церквах в Ахене, в Риме, в Равенне и во многих других местах. Лабиринты в церквах большей частью назывались «пути в Иерусалим» и служили символом трудного земного путешествия в святые места, наградой за которое является небесная благодать, поэтому центр лабиринта часто называли Небом.

В Англии не встречаются лабиринты на церковном полу, но зато было очень много лабиринтов, сделанных из дерна на лужайках. Они носили различные названия: «Город Троя», «Следы пастуха» и т.п. Большинство из них находится вблизи церквей или на кладбищах, что указывает тоже на их духовное происхождение. О таких лабиринтах упоминает Шекспир в своих пьесах «Сон в летнюю ночь» и «Буря».

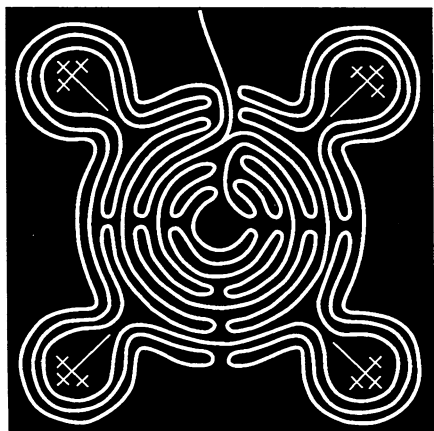


Рис. 49

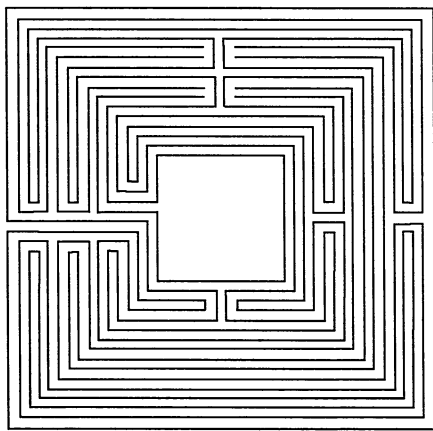


Рис. 50

Образцы подобных «дерновых» лабиринтов приведены здесь на рисунках 48 и 49. Из них первый (рис. 48) в графстве Эссекс имел 110 футов в диаметре, а второй (рис. 49) в Ноттингемшире 51 фут в диаметре с линией пути в 535 ярдов длины (линии извилистых путей обоих этих лабиринтов ясно видны на чертеже). Оба эти лабиринта были взрыты плугом и уничтожены в 1797 году. Для полноты и разнообразия возьмем еще образец итальянского лабиринта XIV столетия (рис. 50), лабиринт, взятый из книги английского писателя 1706 года (рис. 51), и, наконец, датский лабиринт тех же времен (рис. 52).

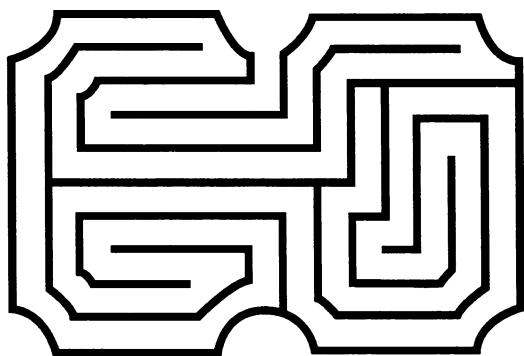


Рис. 51

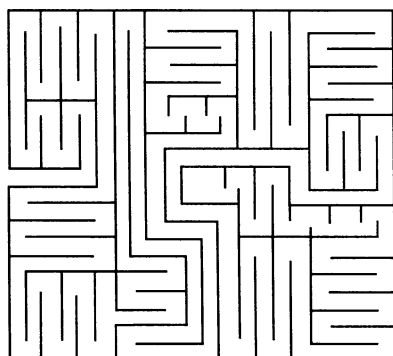


Рис. 52

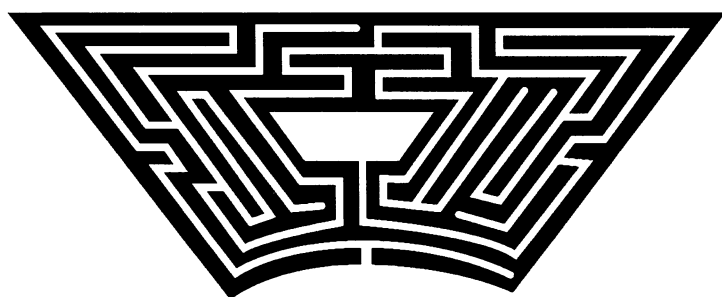


Рис. 53

Все вышеприведенные лабиринты имеют более исторический, чем математический интерес. Распутать их нетрудно. Но после Реформации фигуры эти потеряли свое символическое значение и сделались мало-помалу предметом развлечения. Лабиринты переходят в сады, цветники и парки, где путем проведения прихотливо извивающихся, то пересекающихся, то внезапно прегражденных или заканчивающихся тупиком дорожек получались самые запутанные и головоломные фигуры, в которых действительно нелегко было найти дорогу от края к центру и где трудно было не заблудиться. Из таких затейливых садов если не самый головоломный для решения, то наиболее известный был лабиринт одного из дворцовых садов английского короля Вильгельма III, хотя есть предположение, что он существовал там со времени Генриха VIII.

Способ пройти к этому центру и выйти из сада состоял в том, чтобы, вступив в лабиринт, с первого же шага и до конца **касаться изгороди правой** рукой. Пройденный таким образом путь обозначен у нас линией, состоящей из точек, на рисунке 54.

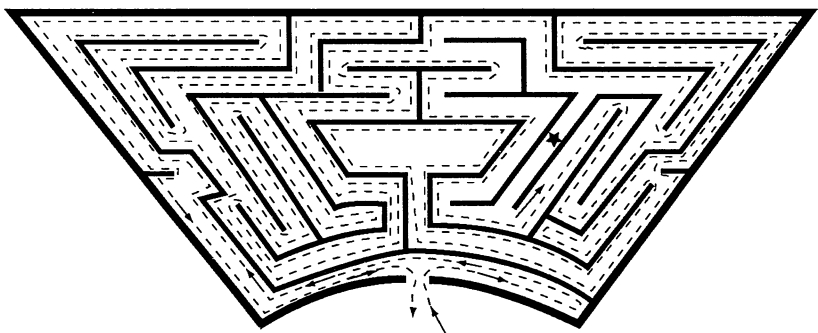


Рис. 54

Следующий лабиринт (рис. 55) во владениях маркиза Солсбери хотя и сложнее предыдущего, но довольно легко решается на бумаге. Другое дело получится, если мы вздумали бы обойти его в действительности, не имея плана или не руководствуясь известной системой. Лабиринт, представленный здесь на рисунке 56, был устроен королевским обществом садоводства в Южном Кессингтоне и ныне не существует. Он очень прост, хотя и имеет три входа, из которых обозначенный буквой *A* ведет почти прямо к центру.

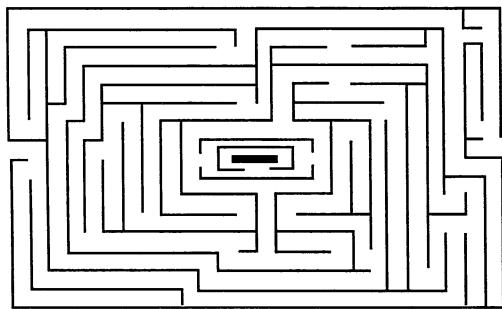


Рис. 55



Рис. 56

Вот еще образец (рис. 57) немецкого лабиринта — изящного, но в сущности незамысловатого, и, наконец, на рисунке 58 представлен интересный образчик лабиринта в графстве Дорсет. Он состоял из гряд холмиков (около фута высоты) и занимал около акра пло-

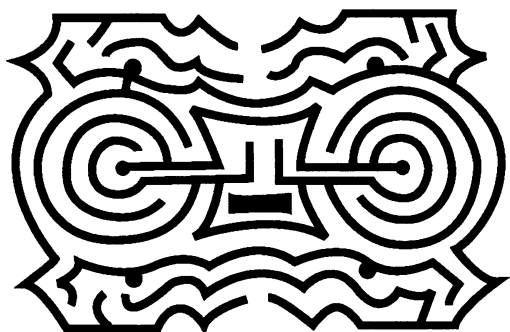


Рис. 57

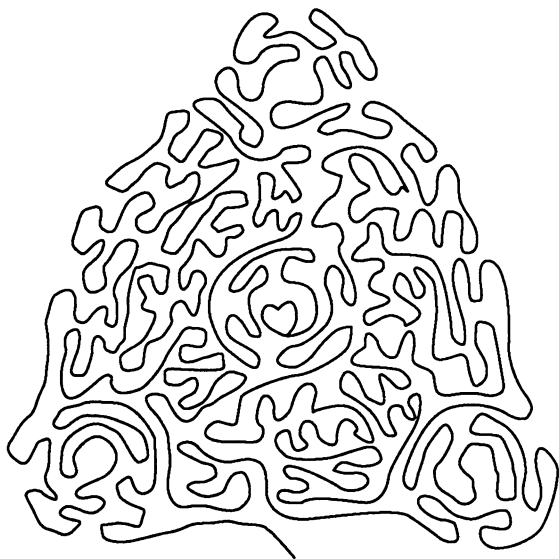


Рис. 58

щади земли. В 1730 году лабиринт этот был запахан, и земля, очевидно, была пущена на другие нужды.

Приведенных образцов лабиринтов и исторических справок, полагаем, достаточно, чтобы доказать, насколько стар вопрос о лабиринтах и вместе с тем насколько многих он интересовал в свое время. Люди изошрялись в изобретении самых замысловатых и «безвыходных» лабиринтов. Но в самом деле, возможно ли построить или даже начертить безвыходный лабиринт — т.е. такой, в котором найти путь к его «центру» и найти отсюда обратный выход

было бы только делом удачи, случая, счастья, а не совершенно определенного и правильного математического расчета? С этой последней точки зрения вопрос приобретает не только теоретический, но и большой практический интерес. В сущности, устройство наших городов, сетей железных дорог, каналов, рек, телеграфов и т.д. — все это более или менее сложные лабиринты. И если взглянуть на дело с этой стороны, то задача о распутывании любого лабиринта может считаться не одним только «развлечением»...

Итак, представляется вопрос: есть ли безвыходные лабиринты или в каждом лабиринте, руководствуясь общими известными правилами, можно разобраться, свободно войти в него, посетить любую данную в нем точку (если она, конечно, не вполне изолирована от всей системы непроходимой стеной) и затем выйти обратно?

Разрешение этого вопроса принадлежит сравнительно позднему времени, и начало ему положено знаменитым Эйлером. Результаты произведенных в этом отношении изысканий привели к заключению, что

Нет безвыходных лабиринтов.

Разрешение каждого лабиринта может быть найдено, и притом сравнительно простым путем.

Аллеи, дорожки, коридоры, галереи, шахты и т.п. лабиринта, как знаем, тянутся, изгибаясь, во все стороны, перекрещиваются, расходятся по всевозможным направлениям, ответвляются, образуют тупики и т.п. Но мы, для большей ясности рассмотрения вопроса, все **перекрестки** обозначим просто **точками**, а все аллеи, дорожки, коридоры и т.д. будем принимать просто за линии, прямые или кривые, плоские или нет — все равно, но эти линии соединяют наши точки (перекрестки) две по две.

Вслед за тем мы говорим, что эти точки и эти линии вместе составляют **геометрическую сеть**, или **лабиринт**, если какая-либо точка, движущаяся по линиям этой сети, может прийти к любой другой точке, не покидая линий нашей системы (или сети).

Приняв это, мы докажем, что подобная движущаяся точка (представляющая, например, человека) может последовательно описать все линии сети без всяких скачков и перерывов, и при этом по каждой линии сети она пройдет не более двух раз.

Другими словами, лабиринт всегда может быть разрешен.

Но еще раньше, чем приступить к этому доказательству, можно доставить себе довольно интересное математическое развлечение, которое поможет уяснить все предыдущее и весьма полезно будет для усвоения самого доказательства. На листе белой бумаги возьмите произвольно несколько точек и соедините их две по две столько раз, сколько хотите, произвольным числом прямых или кривых линий, но так, чтобы ни одна точка системы не осталась совершенно изолированной. Итак, вы получите то, что мы называли геометрической сетью. Или нарисуйте, например, сеть трамваев или конок города, сеть железных дорог страны, сеть рек и каналов и т.д., прибавьте к ним, если хотите, границы страны — вы опять получите геометрическую сеть, или лабиринт (для начала, конечно, лучше брать не особенно сложную сеть).

Теперь на куске непросвечивающей бумаги или картона вырежьте отверстие, через которое была бы видна только небольшая часть составленной вами решетки, или лабиринта. Без такого приспособления в глазах рябит и легко запутаться в сети. Затем направьте окуляр (отверстие для глаза) вашего «экрана» на какой-либо перекресток (точку) вашей сети — например, точку, которую назовем A , — и сделайте себе такое задание: обождать этим окуляром непрерывно все линии сети два раза (пройти каждый путь вперед и назад) и возвратиться в точку A . Чтобы помнить уже пройденные окуляром линии, примите за правило на каждой проходимой линии ставить поперечную черточку при входе в перекресток и при выходе из него. Отсюда следует, что две оконечности каждого пути от перекрестка до перекрестка (от точки до точки) после выполнения задания (пройти каждую линию сети два раза) должны быть обозначены двумя поперечными черточками, но не более.

Если мы имеем дело с действительным лабиринтом или галереями подземных шахт с разветвлениями пещер и т.д., то блуждающему в этих шахтах вместо черточек на бумаге придется делать уже иной знак, чтобы ориентироваться, и класть, например, камень при входе и выходе из каждого перекрестка — в галерею, которую он покидает, и в той, в которую он входит.

Правило I. Отправляемся от начального пункта (первого перекрестка) и идем по какой угодно дороге, пока не приходим или в тупик, или к новому перекрестку. Тогда:

1. Если окажется, что мы попали в тупик, то возвращаемся назад, пройденный путь должен быть уже отброшен, так как мы его прошли два раза (вперед и обратно).

2. Если же мы приходим к новому перекрестку, то направляемся по новому произвольному пути, не забывая только всякий раз отметить поперечной черточкой путь, по которому мы прибыли, и путь, по которому отправились дальше.

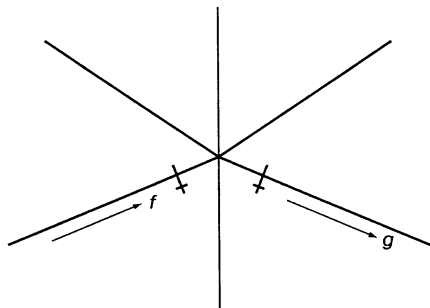


Рис. 59

Как это показано на рисунке 59, где мы движемся в направлении, показанном стрелкой f , приходим к пересечению путей и берем направление, обозначенное стрелкой g , но тот и другой путь мы обозначаем черточкой или крестиком (причем крестик обычно ставится, чтобы обозначить второй, позднейший путь).

Мы следуем указанному выше первому правилу всякий раз, когда приходим на такой перекресток, на котором мы еще не были. Но в конце концов мы обязательно должны прийти к перекрестку, на котором уже были, и здесь может представиться два случая. На известный уже нам пункт мы проходим по дороге, уже раз пройденной нами, или же по новому пути, не отмеченному еще черточкой. В таком случае следует придерживаться таких правил:

Правило II. Прибыв на известный уже нам перекресток по новой дороге, мы должны сейчас же повернуть обратно, предварительно отметив этот путь двумя черточками (прибытие и обратное отправление) (рис. 60).

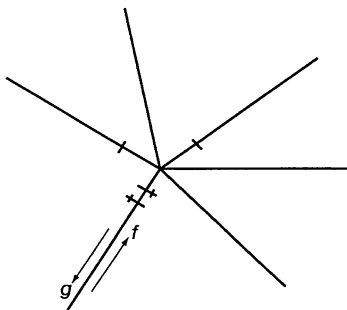


Рис. 60

Правило III. Если мы приходим на известный нам перекресток таким путем, который мы уже раз прошли раньше, то, отметив этот путь второй черточкой (или крестиком), отправляемся дальше путем, которым мы еще не шли, если только такой путь существует (рис. 61).

Но если такого пути нет, то выбираем дорогу, по которой прошли, только один раз (рис. 62).

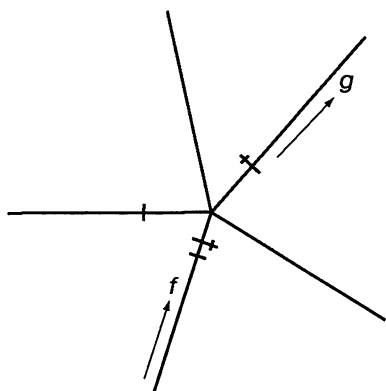


Рис. 61

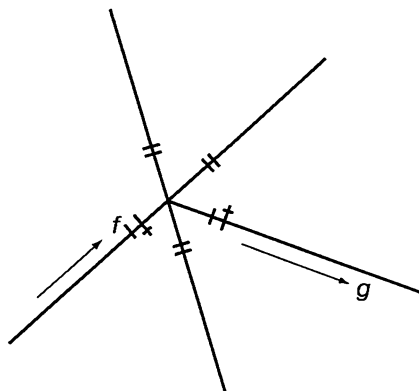


Рис. 62

Придерживаясь точно указанных правил, мы обойдем два раза все линии сети и придем в точку отправления. Это можно доказать, сделав и уяснив себе предварительно такие замечания:

1. Выходя из точки отправления, скажем, A , мы ставим начальный знак (поперечную черточку или крестик).

2. Прохождение через перекресток по одному из предыдущих трех правил каждый раз добавляет два знака (две поперечные черточки) на линиях, которые сходятся в этой точке.

3. В любой момент прохождения лабиринта, перед прибытием на какой-либо перекресток или после отправления из него, начальный перекресток (пункт отправления) имеет нечетное число знаков (черточек и крестиков), а всякий другой перекресток имеет их четное число.

4. В любой момент, до или после прохода через перекресток, начальный перекресток имеет только один путь, обозначенный только одной черточкой. Всякий же иной из посещенных уже перекрестков может иметь только два пути, обозначенных одной черточкой.

5. После полного обхода лабиринта у всех перекрестков все пути должны иметь по две черточки. Это, впрочем, входит прямо в условие задания.

Приняв во внимание все вышеизложенное, мы легко убедимся, что если кто-либо отправляется из начального перекрестка, скажем, A , и прибывает в какой-либо иной перекресток M , то он не может встретить таких трудностей задачи, которые могли бы остановить его дальнейшее путешествие. В самом деле, в это место M он приходит или новым путем, или путем, который уже один раз пройден. В первом случае прилагается I или II из данных выше правил. Во втором — вступление на перекресток M и остановка здесь дала бы нечетное число знаков около него, следовательно, за неимением нового пути надо пойти по уже пройденному один раз пути, и около перекрестка будет четное число знаков (если он не начальный), по замечанию 3.

Пусть, наконец, мы будем вынуждены закончить наш путь и возвратиться в начальный перекресток A . Назовем эту последнюю линию ZA , т.е. она ведет из перекрестка Z в начальный A . Этот путь должен быть тем самым, которым мы отправились первый раз из A , иначе путь можно было бы продолжать. И если теперь мы принуждены им же возвратиться в точку исхода, то это значит, что в перекрестке Z нет уже никакого другого пути, который бы не был уже 2 раза пройден. Иначе это значило бы, что забыли приложить первую часть правила III — более того, это значило бы, что в Z есть какой-то путь YZ , пройденный только один раз по замечанию 4. Итак, при последнем возвращении в A все пути в Z должны быть отмечены двумя черточками. Точно так же это можно доказать для предшествующего перекрестка Y и для всех остальных. Другими словами, наше предложение доказано и задача решена.

Задача 35-я.

Филадельфийский лабиринт

Об одном из новейших, не построенных, впрочем, а только начерченных лабиринтов, рассказывают такую историю.

Несколько лет тому назад один странствующий торговец, живя в Филадельфии, в Соединенных Штатах Америки, увлекся головоломными лабиринтами так, что забросил все свои дела. Дни и ночи проводил он за разрешением и составлением головоломных ла-

биринтов. Приводимый здесь лабиринт (рис. 63) довел его до пьянства. В конце концов он помешался. Разумеется, мозги его и раньше были не в порядке, если такой незначительной причины было достаточно, чтобы окончательно расстроить их.

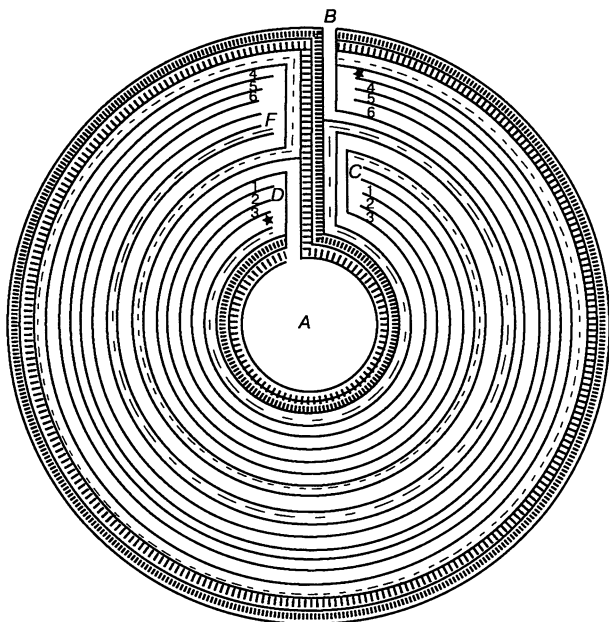


Рис. 63

Во всяком случае, отсюда следует вывести такую мораль, что лабиринты совсем уж не такая важная вещь, чтобы из-за них стоило голову терять. Приводим этот в буквальном смысле слова головоломный лабиринт уже с готовым и упрощенным решением его: все тупики (слепые проходы) в нем уже заштрихованы и главнейшие пути указаны пунктирными линиями. И по решению, данному на этой фигуре, видно, что от *А* надо сначала идти к *С* и потом от *С* к *В*. Но, когда мы придем к *С*, у нас появляются три дороги, обозначенные 1, 2, 3, чтобы дойти до *Д*. Точно так же, когда мы дойдем до *Е*, тоже видны три дороги, обозначенные 4, 5, 6, чтобы дойти до *Ф*. У нас есть, таким образом, обозначенная точками дорога от *С* до *Е*, другая — обозначенная точками дорога от *Д* до *Ф* и проход от *Д* до *Е*, указанный звездами. Мы можем, следовательно, выразить положение дела маленькой упрощенной диаграммой на рисунке 64. Здесь все условия пути соответствуют путям круго-

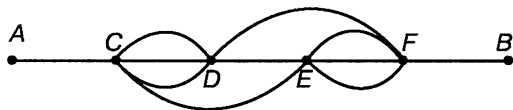


Рис. 64

образного лабиринта, но только более доступны глазу. И вот при таких-то условиях, при условии также, которое здесь можно выполнить, не проходить дважды через один и тот же проход, окажется 640 путей от *A* до *B*.

Задача 36-я.

Хижина Розамунды

А теперь, дорогой читатель, после изложенного решения задачи о лабиринтах для вас будет нетрудно найти путь к хижине прекрасной Розамунды, поселившейся в парке, изображенном на рисунке 66. Если до сих пор вам не приходилось еще слышать о прекрасной

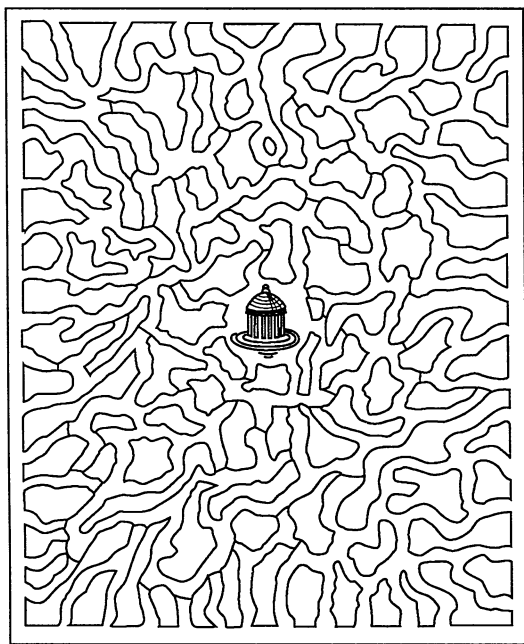


Рис. 65

Розамунде, то, кстати, достаньте книгу и прочитайте эту историю... Быть может, для сокращения времени вам небесполезен будет совет начать поиски от хижины и найти лучше выход из этого коварного парка, чем начинать со входа. Впрочем, при наличии свободного времени это безразлично.

Задача 37-я.
Еще лабиринт

Вот еще любопытный образчик лабиринта, в котором надо пробраться по кратчайшей дороге к центру (рис. 66).

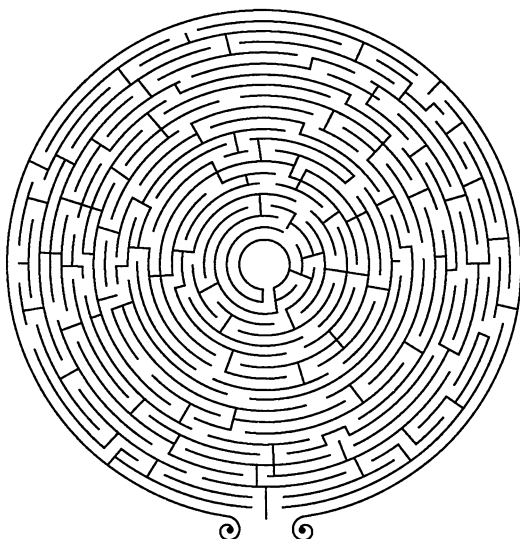


Рис. 66

Задача 38-я.
Картографический вопрос,
или Теорема о четырех красках

Вопрос, на который мы сейчас желаем обратить внимание читателя, известен уже давно всем, специально занимающимся черчением и раскрашиванием географических карт и планов. Состоит он в следующем:

Для всякой карты достаточно четырех различных красок, чтобы любые две области, имеющие общую пограничную линию, не были окрашены в один и тот же цвет; причем все равно, сколько бы ни было областей, как бы прихотливы ни были их пограничные очертания и как бы сложно ни было их расположение.

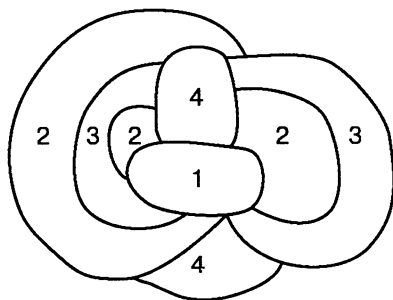


Рис. 67

Рассматривая рисунок 67, можно убедиться, что четыре различные краски действительно необходимы. Несколько попыток, предпринятых в этом направлении, достаточно для большинства, чтобы убедиться в невозможности составить карту с таким расположением областей или участков, где потребовалось бы для выполнения условий задачи более четырех различных красок. Но дать этому последнему положению математическое доказательство составляет уже совершенно иное дело.

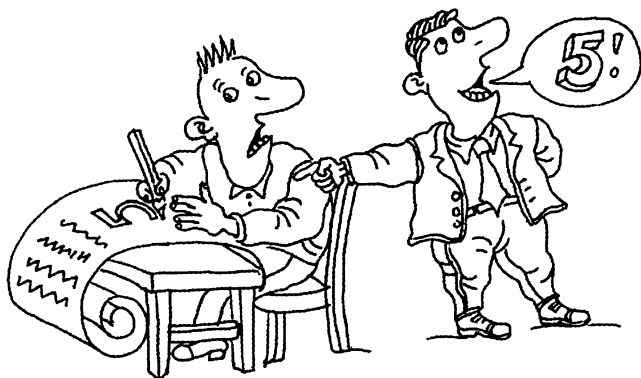
Специалистам картографического дела этот вопрос известен уже давно. Но как математическую теорему или задачу для решения впервые выдвинули его только в 1840 году. Вопрос получил известность и был объявлен как один из нерешенных или даже, быть может, неразрешимых с помощью математики. Задача еще ждет своих победителей.

Если бы рассматриваемое нами предположение было неверно, то это можно было бы обнаружить хотя бы одним каким-либо примером — например, составлением такой «карты» с пятью или более областями, где четырех красок для выполнения заданного условия недостаточно. Многие и попытались это сделать, но... вопрос так и остается открытым.

Пока что доказано только, что существуют поверхности, для которых данная теорема не имеет места. Теорема может иметь место на плоскости или на поверхности шара.

Быть может, кто-либо из наших читателей займется этим вопросом и будет настолько настойчив и счастлив, что разрешит его!

НОВЫЙ РОД ЗАДАЧ



Задача 39-я.

Написать единицу тремя пятерками

Решение

Задача состоит в том, чтобы, пользуясь тремя цифрами и какими угодно знаками математического действия, написать выражение, равное единице.

Вот некоторые из решений предлагаемой задачи:

$$\left(\frac{5}{5}\right)^5 = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\frac{5}{5}} = 1, \text{ ибо } \frac{5}{5} = 1, \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

$$5^{5-5} = 1, \text{ ибо } 5 - 5 = 0, \text{ а } 5^0 = 1.$$

$$(\log_5 5)^5 = 1 \text{ ибо } \log_5 5 = 1 \text{ а } 1^5 = 1.$$

$$\sqrt[5]{\log_5 5} = 1 \text{ ибо } \log_5 5 = 1 \text{ а } \sqrt[5]{1} = 1.$$

Можно пытаться найти и другие решения, кроме этих пяти.

Задача 40-я.

Написать ноль тремя пятерками

Решение

Задача одного порядка с предыдущей.

$$(5 - 5)^5 = 0, \text{ ибо } 5 - 5 = 0, \text{ а } 0^5 = 0.$$

Вот еще решения этой задачи:

$$5 \times (5 - 5); \frac{5-5}{5}; \sqrt[5]{5-5}; \log_5 \frac{5}{5}; \log_5 \log_5 5.$$

Задача 41-я.

Написать 2 тремя пятерками

Решение

$$\frac{5+5}{5} = 2 \text{ и } \log_5 (5 \times 5) = 2.$$

Задача 42-я.

Написать 5 тремя пятерками

Решение

Задача имеет не менее десяти решений:

$$5 + 5 - 5; \quad 5 \times \frac{5}{5}; \quad 5^{\frac{5}{5}}; \quad \frac{5}{\frac{5}{5}}; \quad 5 \log_5 5;$$

$$5^{\log_5 5}; \quad \sqrt[5]{5^5}; \quad \log_5 5^5; \quad \frac{5}{\log_5 5}; \quad \log^5_{\sqrt{5}} 5.$$

Задача 43-я.

Написать 31 пятью тройками

Решение

Эта задача гораздо сложнее предыдущих. Она не нова, и обыкновенно считают, что она имеет всего три решения:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3};$$

$$31 = 33 - 3 + \frac{3}{3};$$

$$31 = 33 - \frac{3 + 3}{3}.$$

Однако решений здесь гораздо больше.

Так как число 31 может быть написано и не по десятичной системе счисления, то число 31 посредством пяти троек может быть выражено и по-другому:

По четвертичной системе счисления — два решения:

$$31 = 3 + (3 \times 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 + (3 \times 3) + \log_3 3.$$

По шестеричной системе — два решения:

$$31 = 3 \times (3 + 3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times (3 + 3) + \log_3 3.$$

По восьмиричной системе — два решения:

$$31 = 3^3 - 3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3^3 - 3 + \log_3 3.$$

По девятиричной системе:

$$31 = 3 \times 3 \times 3 + \frac{3}{3}; \quad 31 = 3 \times 3 \times 3 + \log_3 3;$$

$$31 = 3^3 + 3^{3-3}; \quad 31 = 3^3 + (\log_3 3)^3;$$

$$31 = 3^3 + \sqrt[3]{\frac{3}{3}}; \quad 31 = 3^3 + \sqrt[3]{\log_3 3};$$

$$31 = 3^3 + \left(\frac{3}{3}\right)^3.$$

По 27-ричной системе — два решения:

$$31 = 3 \times 3^3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times 3^3 + \log_3 3.$$

По 72-ричной системе — два решения:

$$31 = (3 \times 3)^3 + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = (3 \times 3)^3 + \log_3 3.$$

По 243-ричной системе — четыре решения:

$$31 = (3 \times 3)^3 + \frac{3}{3}; \quad (3 \times 3)^3 + \log_3 3;$$

$$31 = 3^{3+3} + \frac{3}{3}; \quad 31 = 3^{3+3} + \log_3 3, \text{ и т.д.}$$

Словом, можно получить все решения, т.е. построенные так же, как и первое.

Рассмотрим остальные два приема. Приписывание троек одна к другой дает следующие решения:

$$31 = 33 - 3 + \frac{3}{3}; \quad 31 = 33 - 3 + \log_3 3;$$

$$31 = 33 - \frac{3+3}{3} \text{ и } 31 = 33 - \log_3 (3 \times 3).$$

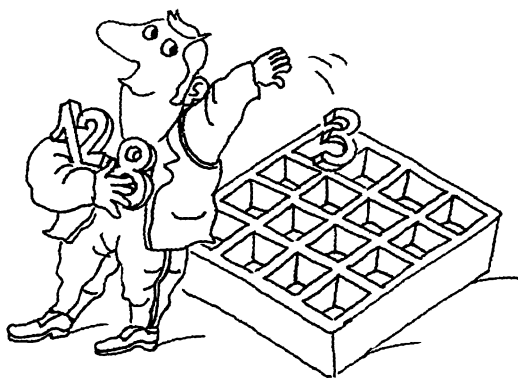
Эти решения верны при всякой системе счисления.

Из других решений этого построения весьма интересны следующие — по четвертичной системе:

$$31 = 3 \times 3, (3) + \frac{3}{3} \text{ и } 31 = 3 \times 3, (3) + \log_3 3.$$

Здесь выражение $3, (3)$ означает «три целых и три десятых в периоде» и равно, по четвертичной системе, $3\frac{3}{3}$, т.е. 4.

СТО ТЫСЯЧ ЗА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ



Осенью 1907 года в Дармштадте скончался математик Пауль Вольфскель, оставивший не совсем обычное завещание: капитал в 100 000 марок он завещал тому, кто докажет одну теорему из теории чисел — теорему, известную под названием «великой теоремы Ферма».

Теорема, за доказательство которой предлагается такой огромный гонорар, очень проста и может быть изложена в немногих словах: сумма одинаковых степеней двух целых чисел не может быть той же степенью третьего целого числа, если степень больше двух. Другими словами, уравнение:

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах, если $n > 2$.

Для случая, когда $n = 2$, такое уравнение разрешимо (это так называемая задача о пифагоровых треугольниках).

Но вам никогда не удастся подобрать такие два числа, чтобы сумма их кубов была бы тоже кубом, или сумма четвертых степеней была бы сама четвертой степенью и т.д.

Немало великих математиков в свое время трудились над доказательством этой неподатливой теоремы, высказанной Ферма более трех с половиной веков тому назад, и никому еще не удалось найти общее, строгое ее доказательство для всех степеней выше второй. И если искомое доказательство оценено такой огромной суммой, то оно вполне заслужило это за свою упорную неуловимость для самых сильных математических умов.

Нельзя сказать, чтобы это доказательство было очень уж важно для науки¹. Гаусс, один из величайших математиков всех времен, относился к теореме Ферма довольно пренебрежительно. «Признаюсь, — писал он своему приятелю, — что ферматова теорема как изолированное предложение для меня большого интереса не представляет, ибо легко можно придумать множество подобных предложений, которых нельзя ни доказать, ни опровергнуть».

И тем не менее лучшие математики (да и сам Гаусс) бились над ее доказательством. Конечно, делалось это неспроста, так как ферматова теорема имеет свою крайне любопытную историю. Она, можно сказать, прямо заинтриговала математиков.

Ее автор Пьер Ферма (1601—1665), юрист по профессии, советник тулузского парламента по положению, поэт и ученый в душе, занимался математикой лишь между прочим, для развлечения. Это не мешало, однако, ему сделать целый ряд огромной важности открытий, справедливо окруживших его славой гениального математика. Он почти не печатал своих трудов, а сообщал их в письмах к своим друзьям, среди которых были такие ученые, как оба Паскаля, Роберваль, Декарт, Гюйгенс и др. Целый ряд теорем из области теории чисел разбросан этим гениальным дилетантом... на полях одной греческой книги! Впрочем, автором сочинения, которому посчастливилось служить записной книжкой для Ферма, был не кто иной, как не менее знаменитый математик Диофант, занимавшийся теорией чисел. О жизни этой загадочной личности нам известно очень мало. Невозможно даже с точностью установить век, когда он жил.

Диофанта называют отцом теории чисел. Говорят, что он жил в III веке в городе Александрия. Главный труд Диофанта — сохранившийся трактат «Арифметика» — был основой для размышлений многих математиков. Диофант жил долго — об этом вы узнаете, если решите следующую задачу, которая сохранилась в надписи на его гробнице:

Путник! Здесь прах погребен Диофанта,
И числа поведать могут, о чудо,
Сколь долгод был век его жизни.

¹ Великая теорема Ферма все же доказана английским математиком Эндрю Уайлсом в конце XX века.

Шестую часть его представляло прекрасное детство.
Двенадцатая часть протекла еще жизни — покрылся
Пухом тогда подбородок,
Седьмую в безбрачии провел Диофант.
Прошло пятилетие; в браке он был осчастливлен рождением
Прекрасного первенца — сына, коему рок
Половину лишь жизни прекрасной и светлой дал на земле
По сравнению с отцом. И в печали глубокой
Старец земного удела конец воспринял, переживши
Года четыре с тех пор, как сына лишился.
Скажи, сколько лет жизни достигнув,
Смерть воспринял Диофант?

Решение задачи сводится к нахождению значения x — неизвестного, которым обозначено число лет Диофанта в уравнении

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Решив уравнение, узнаем, что Диофант жил 84 года.

Многие из теорем, найденных Ферма, записывались без доказательств. Эти доказательства так до нас и не дошли. Но впоследствии все его теоремы были строго доказаны математиками, все, кроме одной — той самой, о которой у нас сейчас идет речь. Эту теорему математики называли великой.

Упомянутая заметка на полях книги Диофанта написана против того места текста, где александрийский математик трактует о разложении полного квадрата на сумму двух квадратов. Вот буквальный перевод того, что Ферма записал сбоку, на полях:

«Между тем совершенно невозможно разложить полный куб на сумму двух кубов, четвертую степень на сумму двух четвертых степеней, вообще какую-либо степень на сумму двух степеней с тем же показателем. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить».

В чем состояло это «поистине удивительное» доказательство, никто теперь не знает. Но в то же время ни один математик не сомневается, что такое доказательство действительно было найдено Ферма и что оно было верно. Не таков был человек Пьер Ферма, чтобы покривить душой, и не таков он был математик, чтобы ошибаться. Ведь все другие теоремы, высказанные им без доказа-

тельств, были доказаны математиками. Такова, например, теорема: «Каждое простое число вида $4n + 1$ есть сумма двух квадратов». Она дана была Ферма без доказательства, но сто лет спустя Эйлер нашел — довольно сложное и трудное — доказательство ее.

Кажущееся исключение, бросающее, по-видимому, тень на репутацию Ферма как непогрешимого теоретика чисел, составляет следующий случай. Ферма высказал гипотезу, что всякое число вида

$$2^{2^n} + 1$$

есть простое число. Проверить эту гипотезу сам Ферма не смог. И никто не смог из математиков в течение целого столетия, поэтому не возникало сомнений в ее правильности. Но вот другой гений теории чисел, Эйлер, доказал, что гипотеза Ферма верна лишь для $n < 32$ и что уже при $n = 32$ получается число:

$$4\ 294\ 967\ 297,$$

которое не простое, а составное, ибо делится без остатка на 641.

Однако это не только не подрывает веры в добросовестность Ферма, но, напротив, скорее даже утверждает ее. Дело в том, что и сам Ферма сомневался в абсолютной верности этой гипотезы и откровенно заявлял, что ему еще не удалось дать исчерпывающее доказательство ее. «Доказательство очень кропотливо, — говорит он, — и должен признаться, что я еще не довел его до удовлетворительного завершения».

Великая **ошибка** Ферма (так сейчас договорились называть гипотезу Ферма $2^{2^n} + 1$ как формулу простого числа) дала толчок другим открытиям в математике. Так, например, Гаусс доказал теорему о построении правильного многоугольника с помощью циркуля и линейки:

при $n = 0$ получаем $2^{2^0} + 1 = 3$, т.е. правильный треугольник,

при $n = 1$ получаем $2^{2^1} + 1 = 5$, т.е. правильный пятиугольник,

при $n = 2$ получаем $2^{2^2} + 1 = 17$, т.е. правильный семнадцатигульник

при $n = 3$ получаем $2^{2^3} + 1 = 257$, т.е. правильный многоугольник с 257 сторонами, и т.д.,

т.е. «с помощью циркуля и линейки можно построить правильные многоугольники, число сторон которых вычисляется по формуле Ферма.

Между прочим, Гауссу за это открытие в немецком городе Гёттингене поставлен памятник на постаменте в виде призмы с основанием: правильный многоугольник, число сторон которого 257.

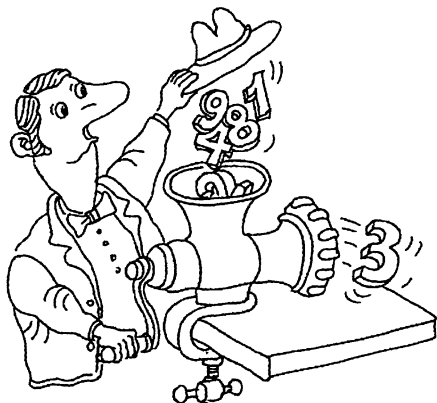
Но вернемся к **великой теореме Ферма** (именно за нее обещан гонорар): $x^n + y^n = z^n$ — неразрешимо в целых числах при $n > 2$.

Прежде всего легко доказать, что если теорема справедлива для показателя n , то она справедлива также и для всякого другого показателя, кратного n . Значит, все дело в том, чтобы доказать справедливость теоремы для всякого простого показателя. Для суммы кубов теорема доказана была еще древними арабами. Для $n = 4$ ее доказал Эйлер. Для $n = 5$ — доказали Гаусс и Дирихле. Для $n = 7$ — доказал Ламе. Наконец, Куммер доказал ее для всякого показателя, меньшего 100.

Таким образом, для многих частных случаев теорема Ферма доказана. Но у Ферма было общее доказательство ее, для всякого n , и это-то общее доказательство требуется найти. При этом достойно быть отмечено, что многие позднейшие математики (Эйлер, Куммер), доказывая частные случаи ферматовой теоремы, пользуются такими приемами, которые далеко выходят за пределы элементарной математики и которые самому Ферма не могли быть известны. Очевидно, гениальный французский математик шел каким-то совершенно особым путем, ускользнувшим из поля зрения других математиков.

Повторим, сегодня великая теорема Ферма доказана в общем виде. Сделал это Эндрю Уайлс.

ИЗ ОБЛАСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЕЛ



Задача 44-я.

Быстрое возвышение в квадрат

Существует очень простой прием устного быстрого возвышения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5:

Нужно цифры десятков умножить на ближайшее высшее число и к произведению приписать 25.

Так, например, $35^2 = 1225$, т.е. 25 приписано к произведению 3×4 ; $85^2 = 7225$, т.е. 25 приписано к произведению 8×9 и т.п. Поясним этот прием в общем виде.

Всякое число, оканчивающееся на 5, можно выразить через $10a + 5$, где a — число десятков. Квадрат этого числа выразится через

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \times 5 \times 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25.$$

Вынеся $100a$ за скобки, имеем

$$100a \times (a + 1) + 25, \text{ или } a \times (a + 1) \times 100 + 25.$$

Отсюда ясно, что нужно число десятков a умножить на ближайшее высшее число $a + 1$, и к результату *приписать* 25.

Тем же приемом можно пользоваться и не для одних двузначных чисел, но, конечно, в этом случае не всегда легко производить нужное перемножение в уме. Но и при умножении на бумаге пользование этим приемом создает экономию во времени.

Так, $105^2 = 11\ 025$ (т.е. 25 приписано к произведению 10×11).

$$125^2 = 12 \times 13 + 25 = 15\ 625;$$

$$335 = 33 \times 34 + 25 = 112\ 225 \text{ и т.п.}$$

Задача 45-я.

Особенные случаи умножения

Некоторые особенности чисел находятся в прямой зависимости от принятой нами десятичной системы их обозначения. Они легко запоминаются, интересны и могут пригодиться для практических и теоретических приложений. К числу важнейших из них относится сумма цифр всех чисел, получаемых в таблице умножения на 9.

$$9 \times 1 = 9$$

$$9 \times 2 = 18; \quad 1 + 8 = 9$$

$$9 \times 3 = 27; \quad 2 + 7 = 9$$

$$9 \times 4 = 36; \quad 3 + 6 = 9$$

$$9 \times 5 = 45; \quad 4 + 5 = 9$$

.....

$$9 \times 9 = 81; \quad 8 + 1 = 9$$

$$9 \times 10 = 90; \quad 9 + 0 = 9$$

$$9 \times 11 = 99; \quad 9 + 9 = 18; \quad 1 + 8 = 9$$

$$9 \times 12 = 108; \quad 1 + 0 + 8 = 9$$

$$9 \times 13 = 117; \quad 1 + 1 + 7 = 9$$

и т.д.

Вот несколько интересных умножений, которые легко удерживаются в памяти благодаря своему внешнему виду.

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

$$\begin{aligned}1 \times 8 + 1 &= 9 \\12 \times 8 + 2 &= 98 \\123 \times 8 + 3 &= 987 \\1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\12\ 345 \times 8 + 5 &= 98\ 765 \\123\ 456 \times 8 + 6 &= 987\ 654 \\1\ 234\ 567 \times 8 + 7 &= 9\ 876\ 543 \\12\ 345\ 678 \times 8 + 8 &= 98\ 765\ 432 \\123\ 456\ 789 \times 8 + 9 &= 987\ 654\ 321\end{aligned}$$

Число, состоящее из всех значащих цифр кроме 8, написанных в последовательном порядке, при умножении на 8, а также на 9 и числа кратные 9 (18, 27, 36 и т.д.) дает нижеследующие интересные и легко запоминаемые результаты:

$$\begin{aligned}12\ 345\ 679 \times 8 &= 98\ 765\ 432 \\12\ 345\ 679 \times 9 &= 111\ 111\ 111 \\12\ 345\ 679 \times 18 &= 222\ 222\ 222 \\12\ 345\ 679 \times 27 &= 333\ 333\ 333 \\12\ 345\ 679 \times 36 &= 444\ 444\ 444 \\12\ 345\ 679 \times 45 &= 555\ 555\ 555 \\12\ 345\ 679 \times 54 &= 666\ 666\ 666 \\12\ 345\ 679 \times 63 &= 777\ 777\ 777 \\12\ 345\ 679 \times 72 &= 888\ 888\ 888 \\12\ 345\ 679 \times 81 &= 999\ 999\ 999\end{aligned}$$

Задача 46-я.

Девять

Прежде всего нетрудно убедиться, что если мы напишем произвольное двузначное число, а затем напишем цифры этого же числа в обратном порядке и возьмем разность полученных чисел, то эта разность всегда разделится на 9.

Например, $72 - 27 = 45$, $92 - 29 = 63$, $63 - 36 = 27$ и т.д. Вообще ясно, что $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$, т.е. получается число, делящееся на 9 (кроме того, разность эта равна произведению 9 на разность цифр данного двузначного числа).

Знание этой особенности может принести практическую пользу. В двойной бухгалтерии случаются иногда ошибки, происходящие от перестановки цифр в числах. Так, например, бухгалтер может вписать в сторону, скажем, «дебета»: 4 руб. 38 коп., а в «кредит» по ошибке поставить 4 руб. 83 коп., т.е. число, состоящее из тех же цифр, но две из них переставлены. Если других ошибок нет, то при подведении баланса между дебетом и кредитом всегда будет выходить такая разница, которая делится на 9. Обратив на это внимание, бухгалтер тотчас должен справиться, не перепутаны ли где цифры.

Задача 47-я. Угадаем число!

Попросите кого-либо написать какое угодно число из трех цифр, но только такое, чтобы крайние цифры были различны. Пусть потом он возьмет это число наоборот, т.е. переставит в нем крайние цифры и вычитет одно число из другого. Полученная разность всегда делится на 9, и вы можете всегда сказать вперед, каково будет частное.

Решение

Например, если взято сначала число 845, то $845 - 548 = 297$, $297 : 9 = 33$, т.е. *разнице между первой и последней цифрой взятого числа, умноженной на 11*.

Чтобы доказать это правило для всякого трехзначного числа, в котором первая и последняя цифры различны, обозначим через a , b и c соответственно цифры сотен, десятков и единиц числа. Тогда взятое число есть

$$100a + 10b + c,$$

а написанное наоборот:

$$100c + 10b + a.$$

Вычитая одно из другого и деля на 9, имеем:

$$\frac{100a + 10b + c - (100c + 10b + a)}{9} = \frac{99(a - c)}{9} = 11(a - c).$$

Итак, какое бы трехзначное число ни написал кто-либо, вы, взяв разность между крайними цифрами и помножив ее на 11, тотчас говорите частное, которое получится от деления на 9 разности между взятым числом и тем же числом, написанным наоборот.

Задачу можно предложить в еще более занимательном варианте.

Напишите на листке бумаги число 1089, вложите листок в конверт и запечатайте его. Затем скажите кому-либо, дав ему этот конверт, написать на нем в ряд 3 любые цифры, но такие, чтобы крайние из

них были различны и разнились бы между собой более чем на единицу. Пусть затем это число он напишет наоборот и вычтет из большего меньшее. Получится некоторое число. Пусть под этим числом он подпишет его же, но наоборот, т.е. переставив крайние цифры, и сложит оба числа. Когда он получит сумму, предложите ему вскрыть конверт. Там он найдет бумажку с числом 1089, которое, к его удивлению, и есть точь-в-точь полученное им число.

Например, пусть он напишет 713. Взяв наоборот, получаем 317, $713 - 317 = 396$, $396 + 693 = 1089$. Тот же результат получится, как легко видим, и для всякого такого трехзначного числа, в котором первая и последняя цифры различны и разность этих цифр больше единицы.

Задача 48-я.

Фокус!

Возьмите, не говоря мне ничего, любое двузначное число, переставьте в нем цифры и вычтите меньшее число из большего. Скажите теперь мне только одну цифру полученной разности, и я скажу вам тотчас другую.

Решение

Если кто скажет вам любую одну цифру, то другая будет дополнительная сказанной до 9. Так что, если кто-либо скажет вам после того, как вычтет одно число из другого, что одна цифра разности 6, то вы тотчас ему говорите, что другая есть 3 и т.д. Доказательство этого настолько легко, что читатель справится с ним сам без затруднений.

Задача 49-я.

Еще один фокус с девяткой

Возьмите, не говоря ничего мне, число из трех или более цифр, разделите его на 9 и скажите мне только остаток, который получится от такого деления. Зачеркните теперь во взятом вами числе какую-нибудь цифру (но не ноль) и опять скажите мне остаток от деления на 9 числа, полученного после зачеркивания цифры, и я тотчас назову зачеркнутую вами цифру.

Решение

Из первого остатка надо вычесть второй остаток, если же он больше, то к первому остатку надо прибавить 9 и из полученной суммы вычесть второй остаток, тогда всегда получится зачеркнутая цифра. Читатель легко может доказать это сам.

Задача 50-я.

Суперфокус

Напишите число с пропущенной цифрой, и я тотчас вставлю туда такую цифру, что число точно разделится на 9.

Решение

Пусть, например, кто-либо напишет с пропуском ряд цифр 728 57. Тогда, отбрасывая от суммы цифр все девятки, какие возможно, получаем в остатке 2, но $9 - 2 = 7$. Значит, на пустое место надо поставить цифру 7. Доказательство очевидно.

Замечание. Задачи 47—50 можно всячески преобразовывать в новые.

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ КУРЬЕЗЫ



В задаче 45 о некоторых особенных случаях умножения было показано, что легко получить и запомнить результаты некоторых перемножений. Очень легко также запомнить квадраты таких чисел, как 11, 111, 1111 и т.д. А именно:

$$11^2 = 121; 111^2 = 12\ 321; 1111^2 = 1\ 234\ 321 \text{ и т.д.}$$

Нетрудно убедиться, что эти полученные от возвышения в квадрат числа: 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321 и т.д., в свою очередь, отличаются любопытными свойствами. Так, рассматривая сумму их цифр, замечаем прежде всего, что

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$$

и т.д.

Кроме того, каждое из этих чисел можно представить в виде нижеследующих интересных по форме неправильных дробей:

$$121 = \frac{22 \times 22}{1 + 2 + 1}; \quad 12\ 321 = \frac{333 \times 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1};$$

$$1\ 234\ 321 = \frac{4444 \times 4444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1};$$

$$123\ 454\ 421 = \frac{55\ 555 \times 55\ 555}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1};$$

и т.д.

Задача 51-я. **О числах 37 и 41**

Число 37 обладает многими любопытными свойствами. Так, умноженное на 3 и на числа, кратные 3 (до 27 включительно), оно дает произведения, изображаемые одной какой-либо цифрой:

$$\begin{aligned} 37 \times 3 &= 111; & 37 \times 6 &= 222; & 37 \times 9 &= 333; \\ 37 \times 12 &= 444; & 37 \times 15 &= 555; & 37 \times 18 &= 666; \\ 37 \times 21 &= 777; & 37 \times 24 &= 888; & 37 \times 27 &= 999. \end{aligned}$$

Произведение от умножения 37 на сумму его цифр равняется сумме кубов тех же цифр, т.е.

$$37 \times (3 + 7) = 3^3 + 7^3 = 370.$$

Если в числе 37 взять сумму квадратов его цифр и вычесть из этой суммы произведение тех же цифр, то опять получим 37:

$$(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37.$$

Но едва ли не самым интересным свойством числа 37 является то, что некоторые кратные ему числа при круговой перестановке входящих в них цифр дают опять-таки числа, кратные 37. Например:

$$\begin{aligned} 259 &= 7 \times 37 \\ 592 &= 16 \times 37 \\ 925 &= 25 \times 37 \end{aligned}$$

То же самое верно относительно чисел 185, 518, 851 и чисел 296, 629, 962. Все эти числа состоят из тех же цифр, только переставляемых в круговом порядке, и все они кратны 37.

Подобным же свойством отличаются и некоторые числа, кратные 41. Так, числа:

$$17\ 589; 75\ 891; 58\ 917; 89\ 175 \text{ и } 91\ 758,$$

как легко проверить, все кратны 41, и каждое получается из предыдущего путем только одной круговой перестановки входящих в число цифр.

Задача 52-я.

Числа 1375, 1376 и 1377

Написанные выше три *последовательных* числа, *кажется*, суть наименьшие из таких, что каждое делится на куб некоторого числа, отличного от единицы: 1375 делится на 5^3 , 1376 — на 2^3 и 1377 — на 3^3 .

Задача 53-я.

Степени чисел, состоящие из одних и тех же цифр

Вот несколько последовательных чисел, квадраты которых пишутся теми же цифрами, но только в измененном порядке:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 13^2 = 169, & \text{б) } 157^2 = 24\ 649, & \text{в) } 913^2 = 833\ 569. \\ 14^2 = 196; & 158^2 = 24\ 964; & 914^2 = 835\ 396. \end{array}$$

Из одних и тех же цифр, написанных в разном порядке, состоят кубы следующих чисел:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 345^3 = 41\ 063\ 625, & \text{б) } 331^3 = 36\ 264\ 691, \\ 384^3 = 56\ 623\ 104, & 406^3 = 66\ 923\ 416. \\ 405^3 = 66\ 430\ 125; & \end{array}$$

Следующая пара чисел представляет ту особенность, что и квадраты их квадратов также состоят из одних и тех же цифр, только написанных в ином порядке:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 32^2 = 1024, & \text{б) } 32^4 = 1\ 048\ 576, \\ 49^2 = 2401; & 49^4 = 5\ 764\ 801. \end{array}$$

Задача 54-я.

Квадраты чисел, не содержащие одних и тех же цифр

1.. Квадраты чисел, состоящие из девяти различных цифр:

$$\begin{array}{ll} 11\ 826^2 = 139\ 854\ 276 & 23\ 439^2 = 549\ 386\ 721 \\ 12\ 363^2 = 152\ 843\ 769 & 24\ 237^2 = 587\ 432\ 169 \\ 12\ 543^2 = 157\ 326\ 849 & 24\ 276^2 = 589\ 324\ 176 \end{array}$$

$14\,676^2 = 215\,384\,976$	$24\,441^2 = 597\,362\,481$
$15\,681^2 = 245\,893\,761$	$24\,807^2 = 615\,387\,249$
$15\,963^2 = 254\,817\,369$	$25\,059^2 = 627\,953\,481$
$18\,072^2 = 326\,597\,184$	$25\,572^2 = 653\,927\,184$
$19\,023^2 = 361\,874\,529$	$25\,941^2 = 672\,935\,481$
$19\,377^2 = 375\,468\,129$	$26\,409^2 = 697\,435\,281$
$19\,569^2 = 382\,945\,761$	$26\,733^2 = 714\,653\,289$
$19\,629^2 = 385\,297\,641$	$27\,129^2 = 735\,982\,641$
$20\,316^2 = 412\,736\,856$	$27\,273^2 = 743\,816\,529$
$22\,887^2 = 523\,814\,769$	$29\,034^2 = 842\,973\,156$
$23\,019^2 = 529\,874\,361$	$29\,106^2 = 847\,159\,236$
$23\,178^2 = 537\,219\,684$	$30\,384^2 = 923\,187\,456$

2.. Квадраты чисел, состоящие из десяти разных цифр:

$32\,043^2 = 1\,026\,753\,849$	$45\,624^2 = 2\,081\,549\,376$
$32\,286^2 = 1\,042\,385\,796$	$55\,446^2 = 3\,074\,258\,916$
$33\,144^2 = 1\,098\,524\,736$	$68\,763^2 = 4\,728\,350\,169$
$35\,172^2 = 1\,237\,069\,584$	$83\,919^2 = 7\,042\,398\,561$
$39\,147^2 = 1\,532\,487\,609$	$99\,066^2 = 9\,814\,072\,356$

Задача 55-я. Все разные цифры

Если число 123 456 789 умножить на всякое целое число, меньшее, чем 9, и первое с ним, т.е. на числа 2, 4, 5, 7, 8, то каждое полученное произведение будет состоять из 9 *различных* цифр.

В следующем вычитании:

$$\begin{array}{r} _ 987\,654\,321 \\ \underline{123\,456\,789} \\ 864\,197\,532 \end{array}$$

Уменьшаемое, вычитаемое и разность каждое состоит из девяти различных цифр.

Задача 56-я.

**Числа, отличающиеся от своих логарифмов только
местом запятой, отделяющей десятичные знаки**

Исследованиями об отыскании подобного рода чисел занимались в особенности знаменитый Эйлер и английский профессор Тэт. Ниже мы даем только три примера подобных чисел, обращая внимание на то, что ряд их может быть продолжен неопределенно далеко.

$$\lg 1,3\ 712\ 885\ 742 = 0,13\ 712\ 885\ 742$$

$$\lg 237,5\ 812\ 087\ 593 = 2,375\ 812\ 087\ 593$$

$$\lg 3550,2\ 601\ 815\ 865 = 3,5\ 502\ 601\ 815\ 865$$

Задача 57-я.

Круговые числа

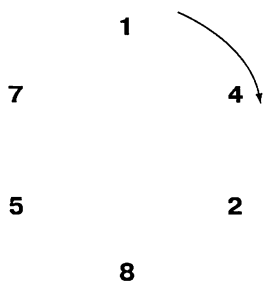


Рис. 68

Число 142 857 отмечается многими замечательными свойствами. Если его умножать на последовательные числа 2, 3, 4, 5 и 6, то полученные произведения будут состоять из тех же цифр, что и само число, только переставленных в круговом порядке. Другими словами, все эти произведения можно получить из представленного здесь круга, читая все числа подряд в направлении движения часовой стрелки, но каждый раз начиная с другой цифры:

$$2 \times 142\ 857 = 285\ 714$$

$$3 \times \quad \gg \quad = 428\ 571$$

$$4 \times \quad \gg \quad = 571\ 428$$

$$5 \times \quad \gg \quad = 714\ 285$$

$$6 \times \quad \gg \quad = 857\ 142$$

$$7 \times \quad \gg \quad = 999\ 999$$

$$8 \times \quad \gg \quad = 1\ 142\ 856.$$

При умножении числа на 7 получается шесть девяток, при умножении же на 8 получается уже семизначное число 1 142 856. Это последнее замечательно тем, что, приложив его первую цифру 1 к последней 6, получим опять данное число 142 857. Вслед за этим умножения на дальнейшие числа дают тот же результат, т.е. мы получаем опять числа, написанные цифрами 1, 4, 2, 8, 5, 7 и в указанном круговом порядке, *если в получаемых семизначных числах будем первую цифру переносить назад и прибавлять к последней*. В самом деле:

$$\begin{aligned} 9 \times 142\,857 &= 1\,285\,713 \text{ (285 714)} \\ 10 \times \quad \gg &= 1\,428\,570 \text{ (428 571)} \\ 11 \times \quad \gg &= 1\,571\,427 \text{ (571 428)} \\ 23 \times \quad \gg &= 3\,285\,711 \text{ (285 714)} \\ 89 \times \quad \gg &= 12\,714\,273. \end{aligned}$$

Здесь опять следует отметить, что, умножая на 89, мы получаем уже восьмизначное число, но если в нем две первые цифры 1 и 2 придать к двум последним 7 и 3, то опять получим число, состоящее из тех же цифр, что и взятое начальное, но написанное в ином порядке, а именно: 714 285. Точно так же:

$$356 \times 142\,857 = 50\,857\,092$$

(получаем число 857 142, если приложим 50 к 092).

Что же за «*особенное*» такое число 142 857 и в чем секрет его *особенности*?

Ключ к уразумению всех особенностей этого числа дает «исключение», которое нарушает приведенный выше круговой порядок, а именно: произведение $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Число 142 857 есть, как оказывается, *период* дроби $\frac{1}{7}$, если ее представить в виде десятичной дроби.

Совершенно теми же свойствами будет отличаться всякий другой «полный» или «совершенный период», т.е. период, получаемый от обращения в десятичную простой дроби вида $\frac{1}{p}$ (где p есть первоначальное натуральное число), и притом такой период, что число его цифр ровно на единицу меньше, чем показывает число знаменателя данной простой дроби.

Таким образом, свойствами числа 142 857 будет обладать

$$\frac{1}{17} = 0, (0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647).$$

В самом деле:

$$2 \times 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 = 1\ 176\ 470\ 588\ 235\ 294,$$

т.е. получаем число, написанное теми же цифрами, но в ином круговом порядке. И точно так же:

$$7 \times 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 = 4\ 117\ 647\ 058\ 823\ 529$$

В то время, как

$$17 \times 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 = 9\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999.$$

Точно такими же свойствами будет отличаться период дроби

$$\frac{1}{29} = 0, (0\ 344\ 827\ 586\ 206\ 896\ 551724\ 137\ 931),$$

в котором 28 цифр.

Нетрудно доказать, что каждая обыкновенная дробь вида $\frac{1}{p}$, где p есть первоначальное натуральное число, при обращении в десятичную дробь даст период, в котором должно быть меньше, чем p , десятичных знаков. В самом деле, при делении остаток всегда должен быть меньше делителя. Отсюда следует, что в остатках при делении 1 на p для обращения в десятичную дробь может получиться только $p - 1$ различных чисел, а затем процесс начнет опять повторяться.

Так, например, для известной уже нам дроби $\frac{1}{7}$ имеем:

$$\frac{1}{7} = 0,1\ \frac{3}{7} = 0,14\ \frac{2}{7} = 0,142\ \frac{6}{7} = 0,1428\ \frac{4}{7} = 0,14285\ \frac{5}{7} = 0,142857\ \frac{1}{7} = \dots$$

(далее, очевидно, начнется повторение тех же цифр).

Отсюда ясно, что если мы будем множить число 142 857 на 3, 2, 6, 4, 5, то получим период, начинающийся соответственно *после* первой, второй, третьей, четвертой и пятой цифр.

Отметим также еще и следующие положения:

Если период, получившийся от обращения дроби вида $\frac{1}{p}$ (где p есть простое число) в десятичную, содержит $\frac{p-1}{2}$ цифр, то при умножении этого периода на все множители от 1 до $p-1$ всегда будем получать числа из $\frac{p-1}{2}$ цифр, причем все эти числа можно разбить на два ряда таких, что каждое число каждого ряда может получаться из предыдущего путем только круговой перестановки цифр.

Для примера будем обращаться в десятичную дробь $\frac{1}{13}$.

Получается, $\frac{1}{13} = 0, (076\ 923)$.

Умножая число периода на множители 1, 2, 3, ..., 11, 12, находим:

$1 \times 076\ 923 = 076\ 923$	$2 \times 076\ 923 = 153\ 846$
$3 \times \quad \gg = 230\ 769$	$5 \times \quad \gg = 384\ 615$
$4 \times \quad \gg = 307\ 692$	$6 \times \quad \gg = 461\ 538$
$9 \times \quad \gg = 692\ 307$	$7 \times \quad \gg = 538\ 461$
$10 \times \quad \gg = 769\ 230$	$8 \times \quad \gg = 615\ 384$
$12 \times \quad \gg = 923\ 076$	$11 \times \quad \gg = 846\ 153$

Возьмем снова уже известное нам число, представляющее период дроби $\frac{1}{7}$, т.е. число 142 857. Помимо известных уже нам свойств оно обладает и таким: разобьем его на две половины по три цифры в каждой и сложим эти части, найдем число, кратное 9, т.е.

$$142 + 857 = 999.$$

Подобным же свойством отличается и число, представляющее период $\frac{1}{17}$ (см. выше) и т.п. То же относится и к числам, полученным нами выше из периода $\frac{1}{13}$.

Тем не менее, если мы найдем такой период дроби $\frac{1}{p}$, который содержит $\frac{p-1}{2}$ цифр и это последнее число $\frac{p-1}{2}$ будет само ви-

да $4n + 3$, то такой период нельзя, следовательно, разделить на 2 равные половины, где каждая цифра дополнила бы соответствующую до 9. Но в таком случае число $\frac{p-1}{p}$ (дополняющее $\frac{1}{p}$ до единицы) даст период тоже из $\frac{p-1}{p}$ цифр, дополнительный периоду $\frac{1}{p}$.

Например:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{31} = 0, (032\ 258\ 064\ 516\ 129) \\ \frac{1}{31} = 0, (967\ 741\ 935\ 483\ 870) \\ \hline \text{Сумма} = 0, (999999999999999) \end{array}$$

Из указанных выше особенностей известного рода чисел можно извлечь некоторые полезные практические применения. И прежде всего можно ввести значительные упрощения и сокращения в вычисления, когда мы обращаем $\frac{1}{p}$ (p — первоначальное число) в десятичную дробь.

В таком случае, нашедши некоторое число десятичных знаков, мы еще более значительную часть их можем найти, умножая полученную уже часть частного на остаток. Для удобства вычисления процесс деления следует продолжать до тех пор, пока остаток получится сравнительно небольшой.

Будем, например, обращать в десятичную дробь $\frac{1}{97}$. Начав деление числителя на знаменатель, получим в частном 0,01 030 927 835 и в остатке 5. Остаток невелик, поэтому рассуждаем так: начиная с последней полученной цифры частного, дальнейшие цифры должны быть такие, какие получатся от обращения в десятичную дробь $\frac{1}{97}$, умноженной на 5. Итак, умножая на 5 полученные цифры частного (или прибавив ноль справа и деля на 2), мы сразу получаем еще 11 цифр частного.

Задача 58-я. Мгновенное умножение

Если вы усвоили свойства повторяемости одних и тех же цифр, которыми обладают некоторые числа, то это доставит вам возможность производить над числами известные действия которые для непосвященного покажутся прямо поразительными. Так, например, вы можете кому-либо предложить следующее: Я пишу множимое, а вы подписываете под ним какой хотите множитель из двух или трех цифр, и я тотчас же напишу вам произведение этих чисел, слева направо.

Решение

В самом деле, вы напишете как множимое период дроби $\frac{1}{7}$, т.е. число 142 857, о котором мы говорили в предыдущей главе. Предположим, что другой потребует, чтобы вы это число умножили, например, на 493. Дело, в сущности, сводится к тому, что вы это число 493 мысленно умножаете на $\frac{1}{7}$, а затем мысленно же обращаете в периодическую дробь, что при свойствах известного вам периода (142 857) совсем нетрудно. Поэтому, глядя на число 493, вы мысленно делите его на 7 и получаете $\frac{493}{7} = 70\frac{3}{7}$. Следовательно, вы пишете 70 как две первые цифры искомого произведения (пишете слева направо).

Теперь остается $\frac{3}{7}$ (т.е. $3 \times \frac{1}{7}$), иначе говоря, 3, умноженное на период 142 857, и вся задача заключается только в том, чтобы определить первую цифру, с которой надо начинать писать этот период в круговом порядке. Рассуждаем так:

Единицы множимого, 7, на множитель, 3, дают в произведении 21. Значит, последняя цифра в искомом произведении должна быть 1, а следовательно, первой в периоде придется ближайшая следующая, т.е. 4 (или находим 4, деля 3 на 7). Итак, *пишем*, (после 70) еще цифры 4285, а от 71, которые должны бы стоять на конце, надо отнять те 70, что написаны вначале (сравните с умножением $89 \times 142\ 857$ в задаче 57). Это даст две последние цифры искомого произведения: 01. Итак, искомое произведение есть **70 428 501**.

Все это можно при усвоении сущности задачи проделать весьма быстро. И когда ваш собеседник, непосредственным умножением проверив верность вашего ответа, предложит опять взятое вами число (142 857) умножить сразу, например, на 825, вы опять рассуждаете точно так же:

$$\frac{825}{7} = 117\frac{6}{7} \text{ и пишите } 117.$$

Так как $6 \times 7 = 42$, то последняя цифра искомого произведения будет 2; значит, круговую последовательность чисел периода надо начинать с непосредственно 2 следующей цифрой, т.е. с 8, и вы пишете (за 117) **857**; дальше должны идти цифры периода 142, из них надо отнять 117, и вы пишете еще три цифры **025**. Получаете:

$$142\ 857 \times 825 = \mathbf{117\ 857\ 025}.$$

Вот еще пример: 142 857 надо умножить на 378.

$$\frac{378}{7} = 54 = 53\frac{7}{7}, \text{ пишем } \mathbf{53}.$$

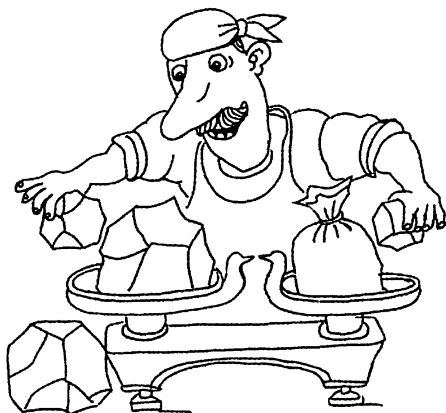
7 при умножении на период дает 6 девяток. Вычитаем мысленно 53 из 999 999 и результат приписываем за 53; получаем **53 999 946**.

Замечание. При некоторой практике это «умножение» делается чрезвычайно быстро и действительно поражает не знающего, в чем дело. Надо, однако, — если желать сохранить секрет и занимательность, — всячески разнообразить это математическое развлечение. Можно, например, партнеру сказать так:

«Вот я пишу некоторое число; подпишите под ним какой угодно множитель из двух или трех цифр, умножьте и полученное произведение разделите на 13. То частное, которое вы после этого получите, я вам напишу сейчас же, как только вы напишете множитель».

В этом случае, конечно, вы пишете в качестве множимого не 142 857, а $13 \times 142\ 857 = 1\ 857\ 141$. Так как 13 в данном случае, в сущности, сокращается, то частное вы получите совершенно так же, как получали произведение в предыдущих примерах. Вместо числа 13 можно взять всякое иное число.

СОФИЗМЫ



В этом разделе мы до некоторой степени осветим некоторые из наиболее распространенных так называемых софизмов, или парадоксов.

О тех классах или подклассах, общих логических ошибок, которые приводит в своей «Логике» Аристотель и которые зависят от неправильных построений силлогизмов, в случаях математических софизмов приходится говорить мало. Наиболее часто в софизмах, рассматриваемых нами, из этих ошибок встречается та, которая зависит от неправильного построения или употребления так называемой малой посылки. В математике подобное логическое противоречие прикрывается незаметным для новичка допущением некоторого обратного, с виду очевидного предложения или же применением процесса математических действий, который кажется неоспоримым, каково бы ни было его приложение по существу. Возьмем хотя бы такой пример:

Пусть c будет среднее арифметическое между двумя *неравными* числами a и b , т.е. $c = \frac{a+b}{2}$, и, следовательно:

$$a + b = 2c. \dots\dots\dots (1).$$

Отсюда

$$(a + b)(a - b) = 2c(a - b);$$
$$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc;$$

Перенеся члены, имеем:

$$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc.$$

Придавая к обеим частям равенства по c^2 :

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2. \dots\dots\dots (2).$$

Отсюда

$$(a - c)^2 = (b - c)^2;$$

или

$$a - c = b - c. \dots\dots\dots (3).$$

Следовательно,

$$a = b$$

А между тем было дано, что a и b неравны! В чем же дело?

Конечно, обе части равенства (3) арифметически равны, но знаки-то этих чисел противоположны; так что равны только их квадраты (2). Допускаемая здесь ошибка настолько очевидна, что, казалось бы, не стоило о ней и говорить, если бы в том или ином виде на ней не строились весьма многие так называемые математические софизмы.

Задача 59-я.

Софистическая карикатура

Существуют по виду, но не по существу, верные «доказательства» того, что всякое математическое действие можно свести на что угодно.

Доказать, что $5=1$.

Вычитая из каждой части по 3, находим: $2 = -2$.

Возвышая в квадрат обе части: $4 = 4$.

Итак, $5 = 1$?

Объясните, где ошибка.

Задача 60-я.

Равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ неверно!

Если a и b отрицательны, а n — четно, то этого тождества уже не существует, и, принимая его, мы приходим к абсурду:

$$\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1};$$

$$\sqrt{1} = (\sqrt{-1})^2;$$

$$1 = -1.$$

Точно так же при $a = +1$ и $b = -1$ равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ дает

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}, \text{ отсюда } \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \text{ и } (\sqrt{1})^2 = (\sqrt{-1})^2 \text{ или } 1 = -1.$$

Задача 61-я.

Что можно получить из равенства $0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ x^2 - x^2 &= x^2 - x^2. \end{aligned}$$

Левую часть представим как произведение суммы на разность, а в правой вынесем общий множитель; получим

$$(x + x)(x - x) = x(x - x). \dots\dots\dots (1)$$

Сокращая на $x - x$, получим:

$$x + x = x. \dots\dots\dots (2)$$

или

$$2x = x,$$

т.е.

$$2=1. \dots\dots\dots (3).$$

Объясните, почему получился абсурд.

Задача 62-я.

Почему $2 = 1$?

Пусть $x = 1$. Тогда $x^2 = x$. И $x^2 - 1 = x - 1$. Деля обе части этого равенства на $x - 1$, получим $x + 1 = 1$.

Но так как по положению $x = 1$, то, подставляя, получаем $2=1$. Почему так получилось?

Задача 63-я.

$$\underline{-1 = 1}$$

Молчаливо допуская, что всякое действительное число имеет логарифм, можно создать новый тип софизмов:

$$(-1)^2 = 1.$$

Так как логарифмы равных величин равны, то:

$$\lg(-1)^2 = \lg 1,$$

$$2\lg(-1) = \lg 1.$$

Так как $\lg 1 = 0$, то $\lg(-1) = 0$.

Значит, $\lg(-1) = \lg 1$,

Откуда, $-1 = 1$.

Объясните ошибку.

Задача 64-я.

$$\underline{-1 > +1}$$

Если взять дробь $\frac{1}{x}$, то она возрастает с уменьшением знаменателя.

Поэтому, так как ряд 5, 3, 1, -1, -3, -5 есть ряд убывающий, то ряд вида $\frac{1}{x}$, т.е.

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \text{ и т.д.,}$$

есть возрастающий ряд. Но в возрастающем ряду каждый последующий член больше предыдущего — значит:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}, 1 > \frac{1}{3}, -1 > 1 \text{ и т.д...}$$

Где ошибка, дорогой читатель?

Задача 65-я.

$$\underline{\underline{2 = 3}}$$

Возьмем тождество $-6 = -6$ и представим его в виде

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4},$$

которое можно представить как равенство

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, имеем:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Прибавляя к обеим частям по $\frac{5}{2}$, имеем:

$$2 = 3.$$

Это, конечно, неверно. Но почему?

Задача 66-я.

$$\underline{\underline{2 > 3}}$$

Очевидно, что $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, т.е.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Логарифмируя обе части, получаем:

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3, \text{ т.е. } 2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}.$$

Деля обе части на одно и то же число $\lg\frac{1}{2}$, получаем:

$$2 > 3.$$

Опровергните, дорогой читатель, это ложное неравенство.

Задача 67-я. Дележ верблюдов

Старик араб, имевший трех сыновей, распорядился, чтобы они после его смерти поделили принадлежащее ему стадо верблюдов так, чтобы старший взял половину всех верблюдов, средний — треть и младший — девятую часть всех верблюдов. Старик умер и оставил 17 верблюдов. Сыновья начали дележ, но оказалось, что число 17 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 9. В недоумении, как быть, братья обратились к шейху (старейшина племени). Тот приехал к ним на собственном верблюде и разделил по завещанию. Как он это сделал?

Решение

Шейх пустился на уловку. Он прибавил к стаду на время своего верблюда, тогда стало 18 верблюдов. Разделив это число, как сказано в завещании, шейх взял своего верблюда обратно, и получилось:

у старшего брата	$\frac{1}{2} \dots\dots\dots 9$	верблюдов,
у среднего брата	$\frac{1}{3} \dots\dots\dots 6$	»
у младшего брата	$\frac{1}{9} \dots\dots\dots 2$	»
<u>Всего... 17 верблюдов</u>		

Замечание. Задача представляет род математического софизма.

Следует заметить, что сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, т.е. не равна единице.

Но отношение целых чисел $9 : 6 : 2$ равно отношению дробей

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}.$$

Задача 68-я. Два общих наибольших делителя

Допустим, что дано два количества

$$x^3 - a^3 \text{ и } a^2 - x^2;$$

и затем на вопрос об их общем наибольшем делителе, т.е. О.Н.Д., один ответил, что О. Н. Д. этих количеств есть $x - a$, а другой — что такой делитель есть $a - x$. Спрашивается: кто прав?

Решение

Оба ответа правильны! Следует только, чтобы отвечающий правильно понял и обсудил вопрос, так как в наличии двух О. Н. Д. нет ничего странного. Если бы количества были предложены в форме $x^3 - a^3$ и $x^2 - a^2$, то отвечающий, естественно, сказал бы, что О.Н.Д. есть $x - a$, и, пожалуй, иной настаивал бы, что существует только он один. Но нетрудно видеть, что $a - x$ есть тоже общий делитель и такого же порядка, как и $x - a$.

Быть может, заметим здесь кстати, следовало бы при изучении элементарной алгебры обращать почаще внимание на то, что всякий ряд алгебраических выражений может иметь *два общих наибольших делителя*, равных по величине, но противоположных по знаку.

Так как слово «наибольший» обозначает превосходную степень, то математику в данном случае приходится извиняться перед филологом за прегрешение против синтаксиса языка.

В самом деле, какой солесизм!.. *Два наибольших...*

Замечание. Все сказанное об О.Н.Д. можно, очевидно, с таким же основанием отнести и к общему наименьшему кратному. Так что с алгебраической точки зрения совершенно естественно говорить о *двух* О.Н.К.

Задача 69-я.**Искусная починка**

На дне деревянного судна во время плавания случилась прямоугольная пробоина в 13 дюймов длины и 5 дюймов ширины, т.е. площадь пробоины оказалась равной $13 \times 5 = 65$ квадратных дюймов. У судового же плотника для починки нашлась только одна квадратная доска со стороной квадрата в 8 дюймов, т.е. вся площадь квадрата равнялась $8 \times 8 = 64$ квадратным дюймам (рис. 69). Плотник ухитрился, однако, разрезать квадрат на части и сложить эти части так, что получился как раз прямоугольник, соответствующий пробоине, которую он и заделал. Вышло, таким образом, что плотник владел секретом квадрат в 64 квадратных единиц меры обращать в прямоугольник с площадью в 65 таких же квадратных единиц. Как это могло случиться?

Решение

Квадрат площадью в 64 квадратных дюйма разрежем на 4 части *A*, *B*, *C* и *D* так, как это указано сплошными линиями на рисунке. 69. То есть сначала разрежем квадрат на два прямоугольника с одинаковыми осно-

Выходит, таким образом, что мы как бы и в самом деле геометрически показали, что $64 = 65$. Но допущенный в наших рассуждениях и построениях софизм легко поясняется рисунком 71. Сложив полученные части квадрата, как указано рисунками, мы получаем, что EH и HG , каждая в отдельности, прямые линии, но они не составляют продолжения одна другой, т.е. одной прямой, а дают ломаную линию. Точно так же и линия EFG есть тоже ломаная линия, и это легко доказать. В самом деле: Пусть X обозначает точку, где прямая EH встречается с прямой CJ . Посмотрим теперь, совпадает ли X с G или нет? Из подобных треугольников EHK и EXJ имеем:

$$XJ : HK = EJ : EK,$$

или

$$XJ : 3 = 13 : 8$$

т.е.

$$XJ = \frac{3 \cdot 13}{8} = 4,875 = 4,875,$$

в то время как $GJ = 5$.

Площадь полученного прямоугольника действительно равна 65 квадратным дюймам, но в ней есть ромбоидальная щель $EFGH$, площадь которой равна как раз 1 квадратному дюйму.

Таким образом, хитрому плотнику все равно пришлось замазывать при починке небольшую щель. Иллюзия же сплошного прямоугольника получается вследствие весьма незначительной разницы наклонения диагонали прямоугольника со сторонами 13 и 5 к большей стороне и наклонения к большей стороне диагонали прямоугольника со сторонами 3 и 8. В самом деле, наклонения выражаются соответственно числами и

$\frac{5}{13}$ и $\frac{3}{8}$, разность которых есть:

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{1}{104}.$$

Заметим, кстати, что встречаемые здесь числа 3, 5, 8, 13 принадлежат к ряду

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,,

в котором каждый член получается сложением двух непосредственно предыдущих членов. Этот весьма замечательный ряд был впервые указан в XIII веке математиком Леонардом Фибоначчи из Пизы.

Задача 70-я.

Обобщение того же софизма

На рисунке 72 указано, как те же четыре фигуры (два равных треугольника и две равных трапеции), что и в предыдущей задаче, сложить тремя различными способами и получить фигуры A , B и C .

Если теперь обозначим $x = 5$ и $y = 3$, то будем иметь для площадей полученных фигур: $A = 63$, $B = 64$, $C = 65$, т.е. $C - B = 1$ и $B - A = 1$.

Словом, теперь уже выходит, что будто бы одни и те же известной формы куски, скажем, бумаги дают три площади различной величины, в зависимости от одного только переложения!

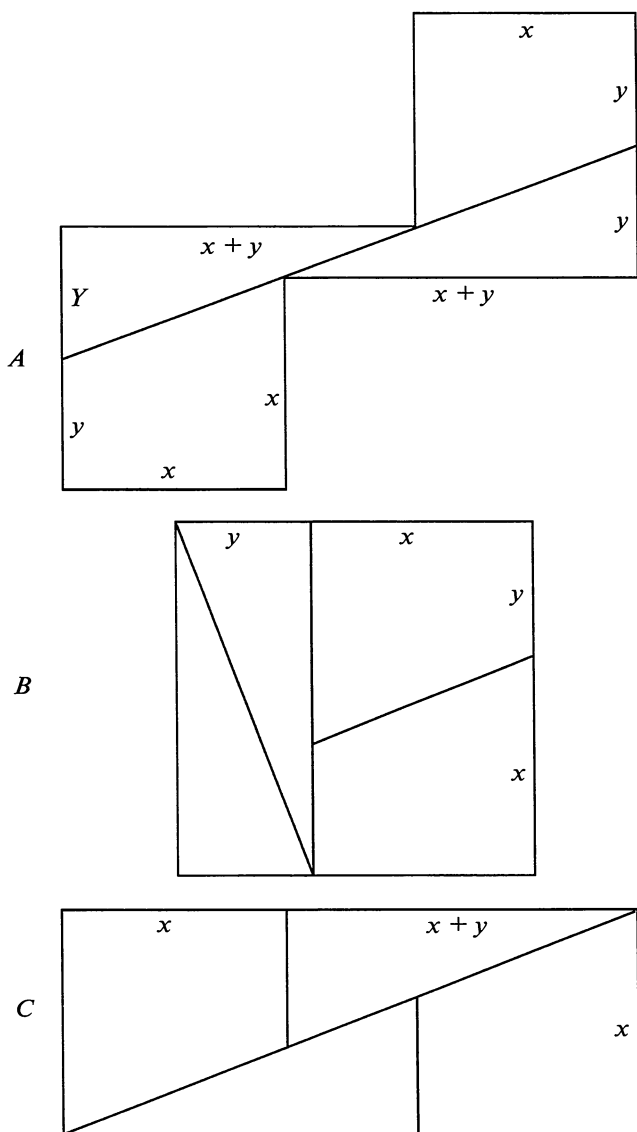


Рис. 72

Исследуем полученные три фигуры алгебраически:

площадь A	равна $2xy + 2xy + y(2y - x) = 3xy + 2y^2$
» B	равна $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
» C	равна $x(2x + y) = 2x^2 + xy$;
» $C - B$	равна $x^2 - xy - y^2$;
» $B - A$	равна $x^2 - xy - y^2$.

Итак, все эти три фигуры будут равны, если $x^2 - xy - y^2 = 0$, т.е., иначе говоря, если

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, взятые нами три фигуры *не могут быть равны*, если x и y выражены оба в рациональных числах. Фигуры A и C кажутся нам сплошными опять-таки вследствие зрительной иллюзии.

Попытаемся теперь найти те рациональные значения x и y , которые разницу между A и B или между B и C делают равной 1. Иначе говоря, надо решить уравнение

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1.$$

Искомые нами решения, как оказывается, заключаются в упомянутом уже нами в предыдущей главе ряде Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots,$$

если для x и y соответственно брать в этом ряду два последовательных члена.

Значения $y = 3$, $x = 5$ суть те, которые обыкновенно даются, как и в настоящем случае; для них мы и имеем, как указано выше, $A < B < C$.

Если взять следующую пару решений $y = 5$ и $x = 8$, то получится $A > B > C$, ибо в этом случае $A = 170$, $B = 169$, $C = 168$.

Как видим из двух предшествующих задач, ряд Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots,$$

где каждый последующий член получается путем сложения двух непосредственно предыдущих, играет значительную роль в исследовании софизмов рассматриваемого рода. Укажем еще на некоторые свойства этого замечательного ряда.

Прежде всего обратим внимание на то, что квадрат каждого члена этого ряда, уменьшенный на произведение двух справа и слева стоящих возле него членов дает попеременно то $+1$, то -1 , т.е.

$$\begin{aligned}
 2^2 - 1 \cdot 3 &= +1, \\
 3^2 - 2 \cdot 5 &= -1, \\
 5^2 - 3 \cdot 8 &= +1, \\
 8^2 - 5 \cdot 13 &= -1.
 \end{aligned}$$

.....

Выделяя члены, дающие -1 , начиная с

$$\begin{aligned}
 8^2 - 5 \cdot 13 &= -1, \\
 21^2 - 13 \cdot 34 &= -1, \\
 55^2 - 34 \cdot 89 &= -1,
 \end{aligned}$$

.....

мы видим, что парадоксы, приведенные нами выше, можно разнообразить сколько угодно. Так, вместо квадрата в 8 единиц длины можно брать квадраты со сторонами в 21, 55 и т. д. единиц длины и получать из них парадоксальные фигуры с еще большим видимым приближением.

Точно так же, если взять в ряду Фибоначчи такие члены, что

$$\begin{aligned}
 13^2 - 8 \cdot 21 &= +1, \\
 34^2 - 21 \cdot 55 &= +1,
 \end{aligned}$$

.....

то можно брать квадраты со сторонами в 13, 34 и т. д. единиц длины. Но здесь для достижения требуемой иллюзии лучше взять сначала прямоугольник (например, со сторонами 8 и 21), а затем разрезать его так, чтобы скрывающаяся нами щель получалась внутри квадрата 13×13 .

Заметим также, что если взять простейшую *непрерывную* дробь

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

и начать вычислять ее последовательные *подходящие*, то опять получим ряд Фибоначчи.

Задача 71-я. Похоже, но не то

Софизм, похожий с виду на данный раньше (задача 69), получится, если построить прямоугольник со сторонами в 13 и 11 единиц длины (рис. 73), рассечь его диагональю и сдвинуть затем полученные треугольники по их общей гипотенузе в положение, указанное на рисунке 74. Эта последняя фигура по виду состоит из квадрата $VRXS$ со сторонами в 12 единиц длины, т.е. площадью в $12^2 = 144$ квадратных единицы. Кроме того, к этой площади надо прибавить площади треугольничков PQR и STU , каждая величиной в 0,5 квадратной единицы. Следовательно, площадь всей фигуры на рисунке 74 равна 145 квадратным единицам. Но как же это получилось, что площадь прямоугольника на рисунке 73 равна только $13 \times 11 = 143$ квадратным единицам?

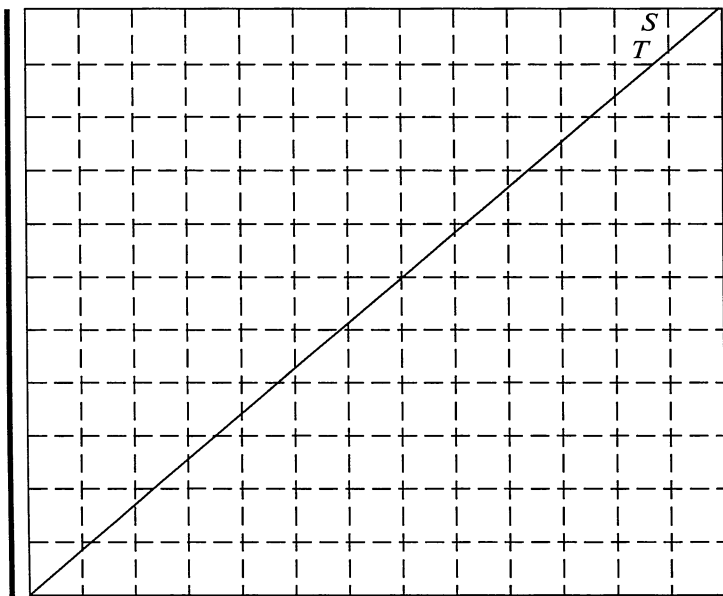


Рис. 73

Рассмотрение фигур, особенно если обратим внимание на то, как диагональ на рисунке 73 пересекает линии, докажет нам, что $VRXS$ не есть квадрат. Длина VS равна 12, но $SX < 12$; длина TX (меньшая сторона на рис. 74) равна 11, но $ST < 1$. С другой стороны, разбирая то же аналитически, имеем:

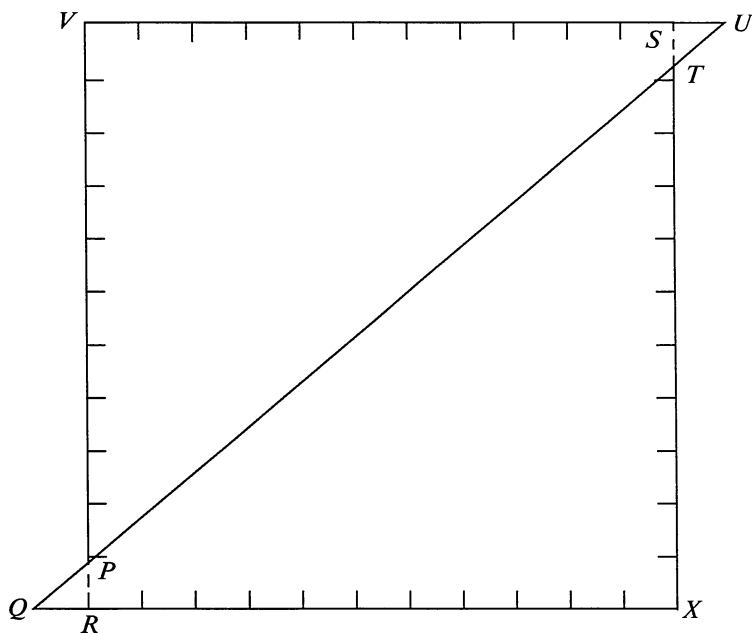


Рис. 74

$$ST : VP = SU : VU$$

или

$$ST : 11 = 1 : 13, \text{ т.е.}$$

$$ST = \frac{11}{13}.$$

Значит, площадь прямоугольника $VRXS$ равна

$$12 \times 11 \frac{11}{13} = 142 \frac{2}{13}.$$

Площадь $\triangle PQR$ равна площади $\triangle STU$, т.е. $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{13} \cdot 1 = \frac{11}{26}$.

Следовательно, площадь фигуры на рисунке 74 равна сумме площадей прямоугольника и двух треугольников:

$$142 \frac{2}{13} + \frac{11}{13} = 143.$$

Задача 72-я.
Еще парадокс

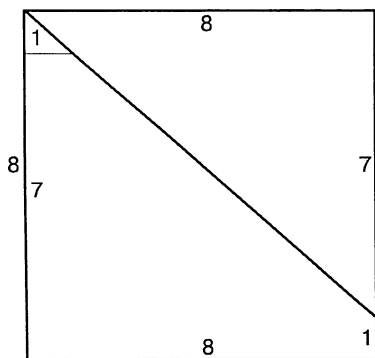


Рис. 75 а

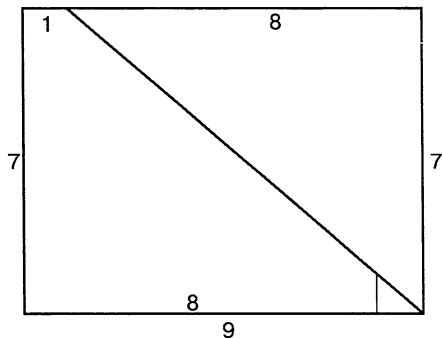
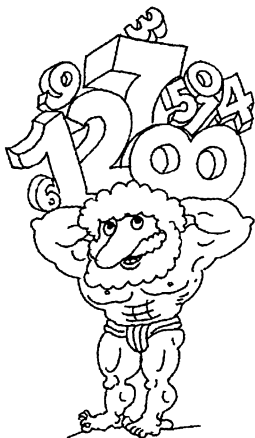


Рис. 75 б

Вот еще один «фокус», который можно сделать с квадратом.

Возьмем квадрат со стороной в 8 единиц длины и, следовательно, с площадью в 64 квадратных единицы. Разрежем его, как указано на рисунке 75 а, и переложим части так, как указано на рисунке 75 б. Получается, по-видимому, прямоугольник с площадью $7 \times 9 = 63$, и это ничего не отбрасывая от площади квадрата, равной 64 квадратным единицам.



Задача 73-я. **«Золотое деление»**

Под названиями «золотое деление», «золотое сечение» или даже «божественное деление» у древних геометров было известно деление «в крайнем и среднем отношении», вошедшее теперь во все наши школьные учебники. Напомним, в чем оно состоит.

Разделить данную величину «в крайнем и среднем отношении» — значит разделить ее на такие две неравные части, чтобы большая относилась к меньшей, как вся величина относится к большей части. В алгебраических символах это выразится так. Если 1 есть величина, подлежащая делению, а x и $1 - x$ — искомые части (большая и меньшая), то между величинами 1, x и $1 - x$ должна существовать следующая пропорциональная зависимость.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x},$$

т.е. x есть среднее геометрическое между 1 и $1 - x$. Из этой пропорции легко определить и значение x . По свойству пропорции имеем:

$$x^2 = 1 - x,$$

откуда

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, получаем, что

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Условию задачи непосредственно удовлетворяет лишь первый корень. Отрицательный корень также имеет известное значение, но мы его здесь рассматривать не будем.

Итак, запомним, что большая часть величины a , разделенной в крайнем и среднем отношении, равна иррациональному выраже-

нию $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Отношение этой части к целому, т.е. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Таково же, согласно пропорции, должно быть и отношение меньшей части к большей. Если мы пожелаем вычислить это выражение, то получим бесконечную непериодическую дробь:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,61804 \dots$$

И вот оказывается, что эта на первый взгляд столь искусственная пропорция, которую нельзя даже выразить рационально, имеет широкое применение в природе. Приведем тому два примера — один из анатомии человеческого тела, другой — из морфологии¹ растений.

Идеально сложенное человеческое тело всецело построено на принципе «золотого деления». Если высоту хорошо сложенной фигуры разделить в крайнем и среднем отношении, то линия раздела придется как раз на высоте талии.

¹Отдел ботаники, носящий название «морфологии» изучает строение органов растений и, следовательно, соответствует анатомии животных.

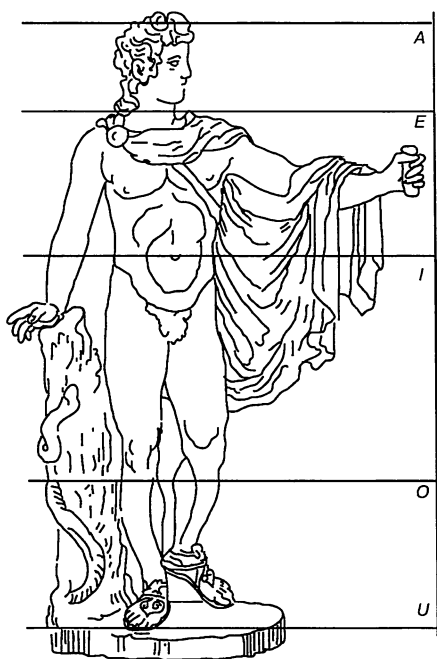


Рис. 76

На любой античной статуе можно проверить этот своеобразный закон. Но дело этим не ограничивается. Если каждую из полученных частей, в свою очередь, разделить в крайнем и среднем отношении, то линия раздела пройдет опять-таки во вполне определенных (анатомических) пунктах: на высоте адамова яблока и надколенных чашечек. На рисунке 76 обозначено «расчленение» статуи Аполлона Бельведерского: I делит всю высоту AU фигуры в крайнем и среднем отношении; линия E делит точно так же верхнюю часть туловища (короткая часть вверху), а линия O — нижнюю часть (короткая часть внизу).

Но и это еще не все. Каждая отдельная часть тела — голова, кисть и т.д. также расчленяется на естественные части по закону «золотого деления». Разделив в крайнем и среднем отношении самую верхнюю из полученных прежде частей (рис. 77), мы убедимся, что раздел придется на линии бровей b ; при дальнейшем делении образовавшихся частей получим последовательно: кончик носа c , кончик подбородка d и т.д. Рука (рис. 78) при расчленении согласно принципу «золотого деления» распадается на свои анатомические части — плечо, предплечье, кисть. Последняя в своем расчленении также отвечает этому принципу (рис. 79) и т.д.

Если бы с самого начала мы разделили тело человека в крайнем и среднем отношении так, чтобы меньшая часть была не вверху, а внизу, то оказалось бы, что линия раздела проходит через концы свободно свисающих рук. Словом, «расчленение» наружных форм правильно сложенного человеческого тела подчиняется принципу «золотого деления». Этот замечательный закон был хорошо известен древним.

Существует, как известно, определенный геометрический способ деления данного отрезка в крайнем и среднем отношении —

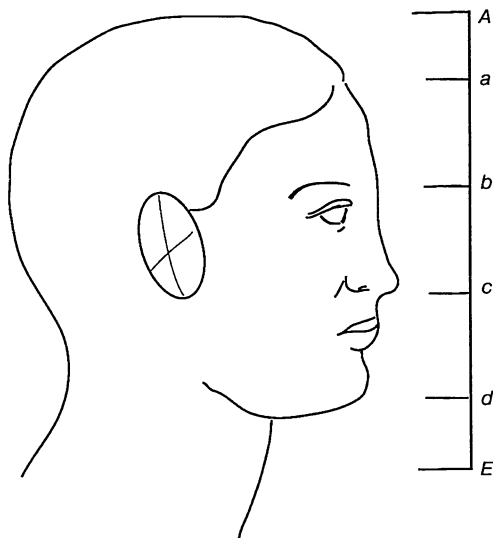


Рис. 77

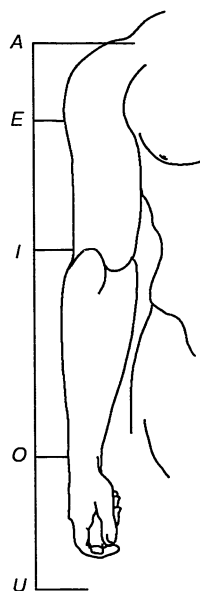


Рис. 78

способ хотя и несложный, однако же и не слишком простой. Из людей, проходивших геометрию, добрых девять десятых его забывают. Но оказывается, что мы часто совершенно бессознательно выполняем это деление, причем люди, никогда не изучавшие геометрии, делают это нисколько не хуже, чем записные математики. Для этого достаточно обладать лишь развитым художественным вкусом.

Примеров применения принципа «золотого деления» можно привести сколько угодно. Возьмем хотя бы обыкновенный крест. Все заметили, вероятно, что фигура эта гораздо изящнее, если меньшая перекладина помещается не ровно посередине большей, а немного выше.

Если бы вам предложили самим устроить крест из двух планок, то вы после нескольких проб придали бы их длинам определенное отношение и расположили

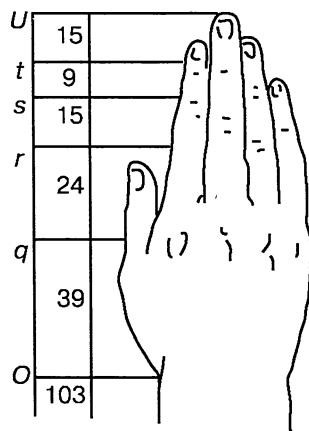


Рис. 79

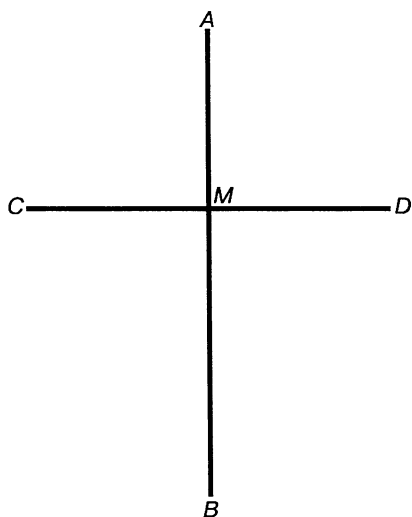


Рис. 80

бы вполне определенным образом. Окажется при этом, что меньшая перекладина будет делить большую в крайнем и среднем отношении. Другими словами, вы совершенно бессознательно применили здесь пропорцию «золотого деления»: отрезки AM , MB и AB (рис. 80) будут удовлетворять пропорции:

$$AM : MB = MB : AB.$$

Любопытно, однако, что части меньшей перекладины должны быть равны, чтобы удовлетворять чувству изящного. На этом примере очень ясно обнаруживается свойственная нам склонность предпочитать сим-

метрию в горизонтальном направлении и «золотое деление» в вертикальном. Не потому ли, что и человеческое тело построено по этому принципу?

В архитектуре мы имеем дело уже с более или менее сознательным применением того же принципа. Для примера рассмотрим одно из знаменитейших произведений древнегреческой архитектуры — Парфенон (рис. 81). Длина его архитрава 107 футов, высота же всего здания от основания до верхушки — 65 футов. Эти два числа, ширины и высоты, вполне удовлетворяют пропорции «золотого деления»: если взять 0,618 от 107, получим $\approx 65,27$, т.е., пренебрегая дробью, высоту здания. Если высоту Парфенона разбить на части по пропорции «золотого деления», то окажется, что все получающиеся при этом точки обозначены характерными выступами фасада.

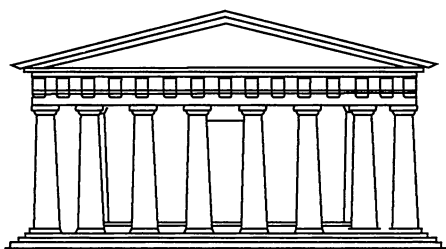


Рис. 81

Произведения готической архитектуры также часто удовлетворяют этому математическому принципу.

После этого отступления в область эстетики вернемся снова к нашей основной теме — математика в природе.

Листья на стебле могут располагаться двояко: либо к известному пункту стебля прикрепляется все-

го один лист, либо сразу несколько. В том и в другом случае расположение их не случайно и подчиняется определенным математическим законам. Мы рассмотрим здесь только первый случай, более общий и интересный.

Если вы внимательно рассмотрите веточку с одиноко сидящими листьями, то заметите, что основания черешков располагаются по *винтовой* линии: каждый следующий лист прикрепляется повыше и в сторону от предыдущего. Это выступит отчетливее, если соединить последовательно основания листьев ниткой — она будет обвиваться вокруг стебля в форме правильной винтовой, или спиральной, линии.

Следя за расположением листьев на этой спирали¹, мы непременно наткнемся на такие листья, которые сидят один над другим — по образующей цилиндрической поверхности стебля. Часть спирали, заключающаяся между двумя такими листьями, называется в ботанике *циклом*; в пределах одного цикла спираль может несколько раз огибать стебель в зависимости от ее крутизны.

В ботанике листорасположение характеризуют числом оборотов спирали и числом листьев в пределах одного цикла. Для краткости и удобства обозначают листорасположение в виде дроби: в числителе пишут число оборотов одного цикла спирали, а в знаменателе — число листьев в этом цикле. Так, дробь $\frac{3}{8}$ показывает, что один цикл спирали *трижды* обходит кругом стебля и что в этом цикле 8 листьев. Легко понять, что та же самая дробь выражает и угол расхождения двух соседних листьев — в данном случае $\frac{3}{8}$ окружности, т.е. 135° . Отсюда следует также, что дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ выражают, в сущности, одно и то же листорасположение, ибо угол в $\frac{3}{8}$ окружности дополняет до 360° угол в $\frac{5}{8}$ окружности; различные цифры

¹Строго говоря, термин «винтовая линия» здесь уместнее, нежели «спираль», но в ботанике установилось употребление второго термина, которого мы и держимся.

получаются в зависимости от того, что в одном случае спираль вели, например, справа налево, в другом — слева направо.

Каждый вид растений имеет свое листорасположение, или, вернее, свой угол расхождения листьев, который выдерживается с большей или меньшей строгостью во всех его частях и распространяется не только на листья, но и на расположение веток, почек, цветов, чешуек внутри почек. Но этот угол, варьируя от растения к растению, однако, произволен: во всем растительном мире наблюдается сравнительно небольшое число типов листорасположения, выражающихся немногими дробями. Вот табличка наиболее распространенных листорасположений:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}; \frac{5}{13}; \frac{8}{21} \dots$$

Ботаники и математики давно заметили, что ряд этот отличается одной любопытной и довольно неожиданной особенностью, а именно что каждая из этих дробей (начиная с третьей) получается из двух предыдущих через сложение их числителей и знаменателей.

Так

$$\frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}; \quad \frac{8}{21} = \frac{3+5}{8+13} \quad \text{и т.д.}$$

Поэтому достаточно запомнить только две первые дроби, чтобы удержать в памяти всю табличку.

Однако в чем разгадка этого странного свойства дробей листорасположения? Прежде всего заменим в табличке дроби $\frac{2}{5}, \frac{5}{8}$ и т.д.

равнозначными им дробями $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}$ и т.д. — мы ведь знаем уже, что такая замена вполне допустима, ибо эти дроби выражают одно и то же листорасположение. Получим ряд

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{8}{13}; \frac{13}{21} \dots,$$

где числители и знаменатели последовательных дробей дают уже известный нам ряд Фибоначчи. Разгадка раскрывается довольно

просто и находится в теснейшей связи опять-таки с принципом «золотого деления».

В самом деле, нетрудно убедиться, что дроби только что приведенного ряда суть простейшие приближения величины $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, найденные путем разложения ее в бесконечную непрерывную дробь:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Заинтересовавшее нас выше правило составления ряда (через сложение числителей и знаменателей) есть просто следствие закона составления подходящих дробей при знаменателе, равном единице:

		1	1	1	1	1
1	1	2	3	5	8	13
1	2	3	5	8	13	21

Итак, к чему же мы пришли? К правилу, что *листья на стебле стремятся расположиться таким образом, чтобы разделить окружность стебля в крайнем и среднем отношении, — избирая притом простейшие приближения этой пропорции.*

Простейшие — ибо в теории непрерывных дробей доказывается, что подходящие дроби, при данной степени приближения, отличаются наименьшими числителем и знаменателем: не существует никакой иной дроби, которая, имея меньшие члены, нежели взятая подходящая, выражала бы искомую величину точнее.

В заключение заметим, что знаменитый художник и ученый Леонардо да Винчи ценил эстетическое значение «золотого сечения», под его влиянием и при его сотрудничестве было написано в 1609 году сочинение Луки Пачиоло «Божественное деление», где эта тема трактуется с большой обстоятельностью.

Задача 74-я.

Математический инстинкт пчел

Задолго, быть может, до появления человека на земном шаре пчелы разрешили задачу, представляющую немалые геометрические трудности. Хотя она разрешается средствами элементарной математики, но не думаем, чтобы ученики выпускного класса были довольны, если бы им на экзамене предложили эту «пчелиную задачу».

Архитектура сот с их шестигранными ячейками известна всякому. Однако далеко не все знают, с каким поистине поразительным расчетом они сооружаются. Стремясь возможно экономнее использовать место в тесном улье и возможно меньше затратить драгоценного воска, пчелы показали себя не только трудолюбивыми архитекторами, но и отменными математиками.

Остановимся прежде всего на шестиугольной форме ячеек и разберем, почему пчелы отдали предпочтение этому многоугольнику. Перед ними стояла задача — заполнить данную плоскость правильными многоугольниками сплошь без просветов, ибо улей тесен и надо использовать каждое местечко. Какие многоугольники годятся для этой цели? Вот первый вопрос.

Сумма углов всякого многоугольника равна $2d(n - 2)$, следовательно, каждый угол правильного многоугольника с n сторонами равен $\frac{2d(n - 2)}{n}$. Если такие многоугольники сплошь заполняют

какую-либо плоскость, то вокруг каждой вершины их должно быть расположено целое число таких углов. Другими словами, правильный многоугольник только тогда годится для сплошного заполнения плоскости, когда угол его, повторенный k раз, составит $4d$ ($=360^\circ$). Поэтому мы можем составить уравнение:

$$k \cdot \frac{2d(n - 2)}{n} = 4d.$$

Сократив на d и сделав упрощения, получим:

$$nk - 2k - 2n = 0. \dots \dots \dots (1),$$

где n — число углов (или сторон) многоугольника, а k — число многоугольников, имеющих общую вершину. Следовательно, n и k должны быть числа целые и положительные. Нам остается найти все целые и положительные решения этого неопределенного уравнения второй степени.

Для этого придется сделать ряд преобразований. Определив n из уравнения, имеем:

$$n = \frac{2k}{k-2} = \frac{2k-4+4}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}.$$

Рассматривая равенство

$$n = 2 + \frac{4}{k-2},$$

мы видим, что n будет целым числом лишь тогда, когда частное $\frac{4}{k-2}$ будет число целое, другими словами, когда $k-2$ будет одним из делителей числа 4. Таких делителей немного, и их легко найти все: 4, 2 и 1. Дальнейших ход решения ясен.

$k-2$	4	2	1
$\frac{4}{k-2}$	1	2	4
$n = 2 + \frac{4}{k-2}$	3	4	6
k	6	4	3

Итак, только три решения удовлетворяют нашим условиям, и, следовательно, только три правильных многоугольника могут заполнить плоскость сплошь, без просветов. Это — **треугольник**, **квадрат** и **шестиугольник**. В первом случае к каждой вершине будут сходиться 6 многоугольников, во втором — 4, в третьем — 3.

Какому же из них надо отдать предпочтение? При устройстве торцовых мостовых шашкам придают шестиугольную форму, но делается это просто потому, что тупые углы (120°) менее скальваются, нежели прямые углы квадрата или острые — треугольника. Пчелам с этим особенно считаться не приходится, зато им крайне важно экономить воск для стенок ячеек. Значит, надо определить, какой из этих многоугольников, при равных площадях, имеет наименьший контур. Это второй математический вопрос, также правильно разрешенный пчелами, ибо из трех упомянутых фигур шестиугольник как раз имеет наименьший контур.

В самом деле. Вообразим треугольник, квадрат и шестиугольник, имеющие одну и ту же площадь S , и сравним их периметры.

Для треугольника из равенства

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

находим сначала сторону a , а затем и периметр $P_1 = 3a$

или

$$P_1 = 6 \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Для квадрата имеем, что сторона его b равна \sqrt{S} , и, следовательно, периметр

$$P_2 = 4\sqrt{S}.$$

Для правильного шестиугольника со стороной c имеем:

$$S = \frac{3 c^2 \sqrt{3}}{2},$$

откуда периметр

$$P_3 = 6 \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}.$$

Отношение

$$P_3 : P_2 : P_1 = 6 \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} : 4 \sqrt{S} : 6 \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} = 1 : \frac{2}{3} \sqrt[4]{3} : \frac{1}{3} \sqrt{6} = 1 : 0,905 : 0,816,$$

откуда ясно, что периметр шестиугольника P_3 наименьший.

Но и это еще не все математические вопросы, разрешенные пчелами. Самую трудную задачу нам еще предстоит рассмотреть. Она-то, собственно, и есть та «задача о пчелиных ячейках», которой занимались ученые XVIII века. Полное решение ее принадлежит известному математику Маклорену.

Задача 75-я. **О пчелиных ячейках**

На продолжении оси OO' правильной шестиугольной призмы возьмем точку S ; через эту точку и через каждую из сторон равносто-

ронного треугольника ACE , полученного соединением через одну из вершин верхнего основания призмы, проведем три плоскости, по которым отрезем от призмы три тетраэдра $BACK$, $DCEH$ и $FEAL$ и заменим их тетраэдром $SACE$, поставленным над призмой. Новый многогранник будет ограничен сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCEH$, $SEAL$; объем его всегда равен объему взятой призмы, где бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида $SACE$ составлена из трех пирамид $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, соответственно равных трем отрезанным пирамидам; так, пирамида $SOAC$ равна пирамиде $KABC$, ибо они имеют равные основания ($\triangle OAC = \triangle ABC$ как половины ромба $ABCO$) и равные высоты SO и KB (по равенству прямоугольных треугольников SOI и KBI).

Имея равные объемы, многогранники имеют, однако, различные поверхности, и задача состоит в определении точки S так, чтобы поверхность нового десятигранника имела наименьшую величину.

Решение

Пусть $AB = a$, $BB' = OO' = b$, $BK = SO = x$; в таком случае:

$$AC = a\sqrt{3}; SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2};$$

следовательно,

$$SK = \sqrt{4x^2 + a^2};$$

площадь ромба $SAKC$, равная полупроизведению диагоналей AC и SK , выразится формулой;

$$\frac{1}{2} a \sqrt{3a^2 + 12x^2};$$

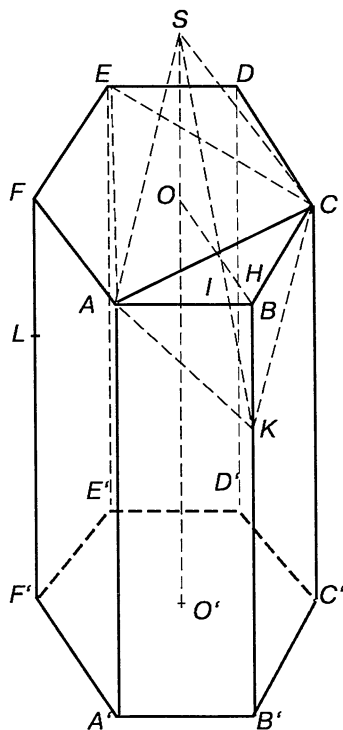


Рис. 82

площадь трапеции $CKB'C'$ — формулой $\frac{1}{2} a(2b - x)$. Следовательно, поверхность многогранника, не считая основания, выражается формулой

$$\frac{3}{2} a \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x),$$

или

$$3a \left[\frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x \right].$$

Постоянный множитель $3a$ не влияет на условия \max и \min , и потому вопрос приводится к определению минимума скобочного выражения. Положив

$$\frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x = m$$

и освободив это уравнение от радикала, найдем:

$$8x^2 - 8(m - 2b)x + 3a^2 - 4(m - 2b)^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2(m - 2b) \pm \sqrt{6[2(m - 2b)^2 - a^2]}}{4}.$$

Чтобы x было действительно, необходимо, чтобы

$$2(m - 2b)^2 - a^2 \geq 0, \text{ или } (m - 2b)^2 \geq \frac{a^2}{2}, \text{ или } m - 2b \geq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\min = 2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$. Помножив на $3a$, найдем, что искомая минимальная поверхность равна

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соответствующая величина $x = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$.

Формула для x показывает, что разность двух смежных боковых ребер должна быть равна четверти диагонали квадрата, построенного на стороне шестиугольника, служащего основанием призмы.

Поверхность призмы, не считая основания, была бы $6ab + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, сле-

довательно, поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ поверхности шестиугольной призмы, имеющей то же основание и тот же объем.

Легко видеть, что для треугольника KBI имеет место пропорция

$$BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3},$$

откуда найдем, что $\angle BIK = 35^\circ 15' 52''$.

Остается добавить, что ячейки пчел суть именно такие десятигранники с наименьшей поверхностью, т.е. шестигранные призмы, ограниченные с одной стороны шестиугольником (вход в ячейку), с другой — тремя ромбами под указанным углом (дно). Два слоя ячеек вплотную входят друг в друга острыми выступами своих доньев и обращены открытыми шестиугольниками в противоположные стороны. Каждая пара таких слоев и составляет сот.

Столь совершенная архитектура пчелиных сот, с математическим расчетом и экономией использующая помещение улья и строительный материал — воск, уже давно приводит в изумление наблюдателей. Дарвин пытался объяснить возникновение этого сложного инстинкта пчел своей теорией естественного отбора, а именно: он допускает, что предки наших пчел сооружали ячейки цилиндрической формы и что эти цилиндры, тесня друг друга, постепенно превратились в шестигранники. Однако его теория далеко не объясняет всех особенностей структуры сот (например, того, что ячейки при данном объеме имеют наименьшую поверхность). Нет сомнения, что мы стоим здесь перед одной из глубочайших загадок природы.

Задача 76-я.

Жук-геометр

Если пчелы разрешили задачу из курса элементарной математики, то небольшой жучок семейства слоников разрешил еще более трудную задачу — из курса высшей математики. Зоологическое название этого жука-математика *Rhynchites betulae*, а народное — *березовый слоник*. Этот маленький (4 миллиметра) черный блестящий жучок с длинным хоботком имеет привычку свертывать в трубки листья березы, ольхи, бука, чтобы положить в них свои яички. Большого удовольствия садоводам и лесоведам березовый слоник, конечно, не доставляет, но зато он способен привести в восхищение математика, если последний обратит внимание на способ, каким жучок свертывает листья. В общих чертах эта манера такова. Предварительно слоник прогрызает близ основания листа

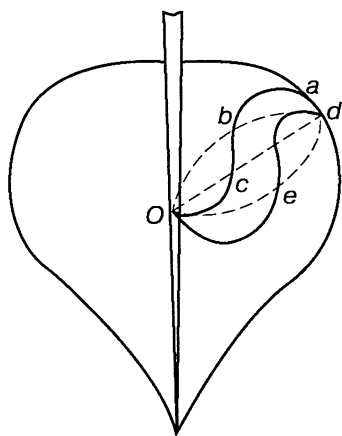


Рис. 83

две кривые линии, которые идут от средней жилки к краям. После этого он свертывает в трубку сначала одну половину листа, а затем обертывает эту трубку другой половиной. Получается нечто вроде сигары, которая и остается висеть на черешке, укрывая положенные в них яйца. Все это длится около получаса.

Математический инстинкт березового слоника проявляется в выборе формы кривого прореза, который он делает на пластинке листа. Эта кривая выбирается далеко не случайно и

находится в некоторой, довольно сложной — однако вполне определенной — связи с формой самого края листа. Вы можете убедиться в этом на опыте. Вырежьте из бумаги фигуру листа (рис. 83) и попробуйте свертывать ее половины в трубку, как это делает слоник, прорезав предварительно лист у его основания. Окажется, что если прорез сделан по прямой od или по дугам obd и oed , свертывание удастся далеко не так легко и удобно, как в том случае, когда надрезу придана форма S -образной линии oca или oed . Для полного же успеха дела важно, чтобы эта S -образная кривая имела вполне определенную форму и занимала определенное положение по отношению к краю листа. В терминах так называемой высшей математики эта взаимная связь может быть выражена так: линия прореза должна быть *эволютой* краевой линии листа, или, что то же самое, краевая линия листа должна быть *эвольвентой* линии прореза.

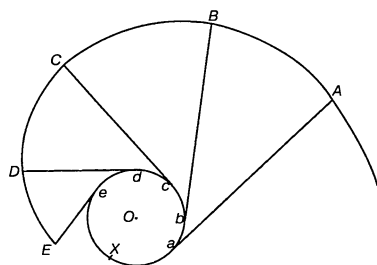


Рис. 84

Постараемся объяснить кратко и наглядно, что такое «эволюта» и «эвольвента». Обратите внимание на рисунок 84. Здесь изображены две кривые — окружность с центром в точке O и кривая $ABCDE$. Зависимость между ними та, что каждая касательная к кривой O перпендикулярна к кривой $ABCDE$. Если две кривые находятся между собой в та-

кой зависимости, то ту, которая перпендикулярна к касательным первой кривой называют *эвольвентой*, или развертывающей, а первую — *эволютой*, или разверткой. В нашем примере окружность с центром в точке O будет эволютой, а кривая $ABCDE$ — эвольвентой.

Если вы желаете по данной эволюте построить ее эвольвенту, то можете поступить следующим образом. Начертите эту эволюту на толстом картоне или дереве и вырежьте ее по краю. Положите вашу картонную эволюту на лист бумаги, закрепите нить Aa в точке a (рис. 84), на другом же конце нити сделайте петельку и вставьте в нее карандаш. Теперь *наматывайте* нить на эволюту, следя за тем, чтобы нить все время оставалась натянутой. Тогда конец A начертит вам эвольвенту взятой кривой. Это строго доказывается в курсах аналитической геометрии.

Вы могли поступить и иначе — а именно: предварительно обмотать нить кругом эволюты и, держа в натянутом виде, *разматывать* ее. В этом случае вы получите ту же самую эвольвенту, что и ранее.

Отсюда следует, между прочим, что касательные эволюты (они же и радиусы кривизны эвольвенты) равны длине той части эволюты, с которой они смотались. Другими словами, если мы начали сматывать с точки x (рис. 84), то длина прямой eE равна длине дуги ex , $dD = dex$, $cC = cdex$ и т.д.

Обратно, если по данной эвольвенте надобно начертить ее эволюту, то проводят к эвольвенте ряд *нормалей* (перпендикулярных линий), которые, пересекаясь одна с другой, образуют некоторую ломаную линию. Вписав в эту ломаную линию кривую, касательную к ее элементам, вы получите искомую эволюту.

Задача 77-я.

Построение жука-геометра

Вот такого-то рода задачу — постройки эволюты по данной эвольвенте — и решает березовый слоник. На той половине листа, которая потом послужит внутренней трубкой, он выгрызает эволюту краевой линии листа. Если для линии надреза $Abcdegiklm$ (рис. 85) построить ее эвольвенту, то эта последняя будет иметь форму кривой $ABCDECIKLxy$, весьма близко подходящую к краевой линии листа.

Прорез другой половины листа, которая облекает первую, не отличается такой математической правильностью. Этого и нельзя ожидать, так как вторая половина не свертывается свободно, как первая, а навивается на первую.

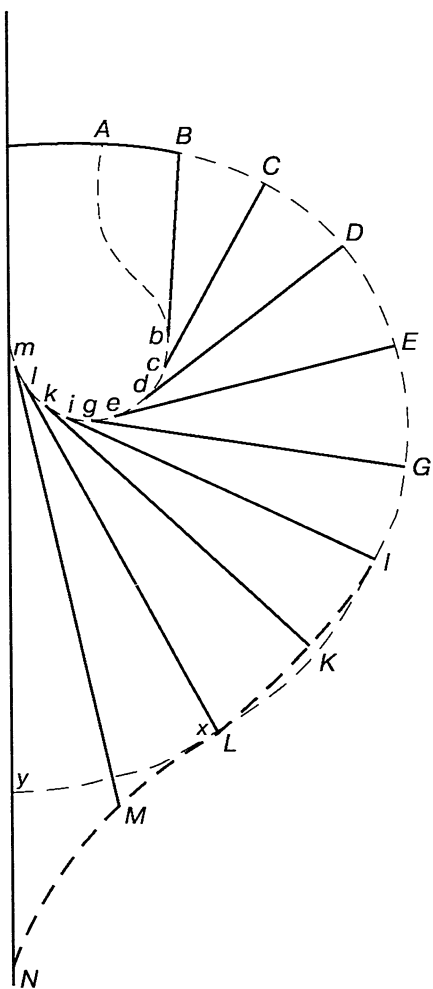
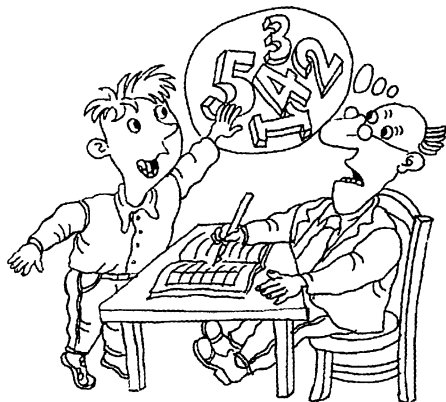


Рис. 85

НЕКОТОРЫЕ ФОКУСЫ



К области здравого развития смекалки следует отнести умение найти не только при решении какого-либо хитроумного вопроса, но и при выяснении математического парадокса или софизма. Необходимо, кроме того, развивать в себе навык, чтобы различать истинно математическую задачу от простого *фокуса*, основанного на отводе глаз или попросту иногда — обмане. Несколько образцов распространенных фокусов подобного рода мы и разъясняем в этом отделе, начиная с простейшего из них.

Задача 78-я. **Странная история**

На столе лежит 5 спичек (или иных каких предметов), и в каждой руке держат по одной. Теперь рассказывают такую историю:

1 2 3 4 5
| | | | |

Пять овец (5 спичек) паслись на лугу, а в лесу находились 2 разбойника (показывают обе спички в руках). Разбойники украли овец одну за другой (берут № 1 левой рукой, № 5 правой, № 2 левой, № 4 правой, № 3 левой). В это время пришел пастух, и разбойники отпустили овец обратно (кладут обратно на стол 1 спичку из правой руки, 1 из левой, 1 из правой, 1 из левой, 1 из правой; теперь в левой руке находится 2 спички, в то время как зрители считают, что в каждой руке — по одной).

Пастух удалился, и разбойники опять забрали одну за другой всех овец (начинают брать левой рукой). Но в это время пришли солдаты, и разбойники убежали, оставив овец в лесу. Открывают руки — и в самом деле: в одной руке 5 овец, в другой 2 разбойника.

Эта веселенькая, хотя и несколько странная история основана, очевидно, только на быстроте рассказа и постоянном подсовывании вне очереди левой руки вместо правой. Как ни прост этот отвод глаз, но сначала он удивляет.

Задача 79-я.

Феноменальная память

Знаменитый «счетчик» Жак Иноди, производивший в уме математические действия над многозначными числами, обладал прежде всего поистине феноменальной памятью чисел — он запоминал сразу длиннейшие ряды цифр и повторял их без ошибки, словно читал по писаному. Здесь мы имеем дело с редким природным даром. Совсем другое дело, когда такую же способность демонстрируют перед публикой провинциальных городов заезжие фокусники. Здесь дело вовсе не в памяти, а в применении остроумного и крайне простого *мнемонического* приема. Полагаем, что читателю небезынтересно будет с ним ознакомиться, чтобы уметь при случае отличить истинную, природную способность от простой уловки.

Например. Фокусник диктует вам несколько длиннейших рядов цифр и затем без запинки повторяет их сколько угодно раз, не смешивая одного ряда с другим и не пропуская ни одной цифры.

Весь секрет в том, что фокусник твердо выучил небольшую табличку, где каждой из десяти цифр отвечают определенные согласные буквы. Для тех, кто пожелал бы сам позабавить своих гостей рядом эффектных фокусов, мы приводим ниже такую табличку. В ней стоящим наверху цифрам отвечают по две согласные буквы.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
н	г	д	к	ч	п	ш	с	в	р
м	ж	т	х	щ	б	л	з	ф	ц

Для облегчения небесполезны будут кое-какие мнемонические указания. Что нулю соответствует буква **н**, легко запомнить, **м** же похоже на **н**, стоит с ним рядом в алфавите. **Г** похоже на единицу по начертанию и часто при смягчении переходит в **ж**. Буква **д** выбрана для двойки как начальная и часто произносится как **т**. Буква **к** напоминает три, потому что состоит из трех черточек; с **х** она родственна как гортанная. **Ч** — первая буква слова «четыре» и напоминает **щ**. **П** — первая буква «пяти» и родственна **б**. Точно так же **ш** напоминает шестерку (**л** приходится просто запомнить), и **с** — семерку; **з** — родственна **с**. **В** — первая буква слова «восемь», **ф** — родственна **в**. Наконец, **р** выбрана для девятки, так как напоминает ее, если перевернуть ее набок; **ц** — приходится выучить.

Как ни смешны могут показаться эти мнемонические сближения, они все же приносят огромное облегчение: зная их, вы в одну-две минуты твердо выучите приведенную табличку и провозитесь над ней, наверное, целый час, если пренебрежете ими.

Затвердив табличку, вы можете уже изумлять приятелей вашей феноменальной памятью не хуже упомянутого выше фокусника. Перед тем как продиктовать ряд цифр, вы вспоминаете какое-нибудь хорошо знакомое стихотворение и мысленно заменяете в нем все согласные звуки соответственными цифрами. Пусть вами выбраны следующие четыре пушкинские строки:

Поэт, не дорожи любовью народной,
Восторженных похвал пройдет минутный шум,
Услышишь суд глупца и смех толпы холодной,
Но ты останься тверд, спокоен и угрюм.

Подставляя в уме вместо согласных отвечающие им цифры, вы диктуете следующие ряды чисел:

5202916580920
8729100353865922002060
76667216597032653620
2720728927530190

Если вас спустя сколько угодно времени попросят повторить продиктованные вами ряды цифр, то, зная, какими стихами вы пользовались, вы безошибочно воспроизведете все четыре ряда.

Если вас попросят сразу сказать, например, третий ряд, то вы вспомните третью строчку («услышишь суд глупца...») и тотчас же назовете все цифры ряда.

Задача 80-я.

Математическое ясновидение

Заговорив о фокусах, разоблачим тайну еще одного весьма эффектного фокуса, которым ловкие «престижиджаторы», читающие мысли, часто морочат публику. Мы говорим о так называемом «математическом ясновидении», «мантевизме» и т.п. «нумерах», которые перечисляются в программах подобных сеансов. Обыкновенно дело происходит так. Фокусник выводит на эстраду свою «ясновидящую», усаживает ее в кресло и завязывает ей глаза. Затем он с аспидной доской спускается в зрительный зал, ходит между креслами и предлагает зрителям самим написать какое-нибудь число меньше тысячи. Когда число написано, фокусник, оставаясь по-прежнему среди зрителей, в партере, обращается к «ясновидящей» с просьбой назвать это число — и та тотчас же выкрикивает с эстрады это число, словно читая его на доске.

Озадаченные зрители пишут второе, третье число, в оба глаза следят за фокусником и «ясновидящей», но ничего подозрительного не открывают: фокусник спрашивает — «ясновидящая» отвечает.

Ни ясновидения, ни внушения, ни чтения мыслей здесь, однако, никакого нет. Просто-напросто фокусник и его помощница твердо выучили уже приведенную выше табличку: обращаясь к «ясновидящей» с просьбой отгадать число, он ловко составляет фразу как раз из таких слов, первые согласные которых означают написанное зрителем число. Вот и вся тайна этого эффектного фокуса.

Теперь вы и сами сможете произвести его. Вам необходимо только изощриться в составлении соответствующих фраз, в быстром и ловком подыскивании подходящих слов, начинающихся с нужной согласной. Но прежде всего вы должны как-нибудь дать знать вашей «ясновидящей», сколько цифр в угадываемом числе: одна, две или три. Дело в том, что в расчет принимаются всегда только первые слова фразы, и «ясновидящая» должна знать, где остановиться.

Для этого фокусник обыкновенно пользуется опять-таки раз навсегда условленными словами. Если задумано однозначное чис-

ло, то он начинает свое обращение к помощнице с односложных словечек: «А» или «Вот». Если написано двузначное число, то вопрос начинается двусложным обращением: «Ну-ка» или «Еще». Наконец, при трехзначном числе никаких условных обращений не употребляют, так что отсутствие в начале вопроса перечисленных четырех слов указывает, что число трехзначное.

Теперь сделаем несколько опытов. Пусть написано число 34; фокусник спрашивает «ясновидящую»: «Ну-ка, какое число написал этот господин?» Слово «ну-ка» указывает, что число двузначное; слову «какое» соответствует 3, а слову «число» соответствует 4.

Пусть написано 92. Фокусник спрашивает: «Еще раз, дружок, отгадай-ка!» Слово «еще» означает две цифры; слову «раз» соответствует 9; слову «дружок» соответствует 2.

На доске написано 4. Фраза: «А что написал теперь этот господин?» (Слово «А» означает одна цифра, слову «что» соответствует 4).

На доске написано 207. Обращение: «Ты не устала? Какое же число сейчас написано?» (отсутствие условных обращений указывает на то, что число трехзначное; слову «ты» соответствует 2, слову «не» соответствует 0, слову «устала» соответствует 7).

Часто фокусники несколько видоизменяют опыт: просят зрителя обозначить какое-либо действие между двумя числами, и мнимая ясновидящая сразу произносит результат (если только он не больше тысячи). Зритель пишет, например, 11×14 . И «ясновидящая» сразу отвечает: 154. Зная секрет «мантевизма», легко догадаться, что при этом фокусник сначала мысленно производит в уме нужные действия и затем известным уже способом сообщает помощнице результат. В нашем примере он может обратиться к ней так: «Голубушка, прикинь, что составляется из этих чисел?» ($г = 1$, $п = 5$, $ч = 4$).

Можно еще более изумить публику, если заставить «ясновидящую» сообщать не только конечный результат, но и указать, от какого действия он получен — сложения, вычитания, умножения или деления. Для этого опять-таки прибегают к условным обозначениям. Именно — связывают с тем или иным действием определенные буквы, на этот раз гласные: *о* обозначает сложение, *ы* или *и* — вычитание, *е* — деление, *у* — умножение.

Подобным же образом «ясновидящая» может угадывать, например, день или год рождения. Кто-нибудь из публики пишет эту дату на доске, фокусник просит помощницу прочесть написанное и получает вполне точный ответ. Здесь число месяца и год рождения

сообщаются ей, как и всякие другие числа, а месяц — условной цифрой. Например, 25 марта — это 25 и 3, так как март третий месяц.

Хотя фокусники будут на нас в большой претензии за то, что мы разоблачаем их незамысловатые профессиональные тайны, мы все же рассмотрим еще один фокус. Раз мы забрели в этот уголок «царства смекалки», то уж осмотрим его повнимательнее.

Задача 81-я.

Отгадывание костей домино

Этот фокус обычно также выдают за «чтение мыслей». Но «чтение мыслей» здесь такого сорта, что вы сами можете осуществить его, не обладая никакими сверхъестественными способностями.

Вы заявляете своим гостям, что беретесь отгадать задуманную им кость домино, находясь с завязанными глазами в дальнем углу залы или даже в соседней комнате. И действительно, когда гости, выбрав из всех костей любую костяшку, спрашивают вас, какая это кость, вы сразу же отвечаете, хотя не можете видеть не только домино, но даже гостей.

У вас должен быть сообщник среди гостей, с которым вы предварительно условились, что местоимения будут означать определенные числа, именно:

я, мой — 1	мы, наш — 4
ты, твой — 2	вы, ваш — 5
он, его — 3	они, их — 6

Пусть гости выбрали кость $4/3$. Тогда ваш сообщник обращается к вам с фразой: «Мы задумали кость, отгадайте-ка ее!» Если нужно «протелеграфировать», например, $1/5$, то ваш сообщник, улучив момент, вставляет такую фразу: «А я думаю, что вы на этот раз не угадаете». Фраза «Ну, теперь у **нас** такие кости, что **тебе** их не угадать» — означает $4/2$ и т.п.

Само собой понятно, что имеют значение лишь первые два местоимения. Для обозначения белого поля также выбирают какое-нибудь слово, например, *сударь*: «Отгадайте-ка, *сударь*, что **мы** тут задумали» будет означать $0/4$.

Как ни просты секреты этих фокусов, их все же трудно разгадать. Нужно обладать большой сметкой, чтобы догадаться, к какой уловке прибегнул фокусник.

Задача 82-я. Хитрая механика

Вот еще два фокуса, при ловком исполнении которых иной может подумать, что здесь и в самом деле таится какая-либо «хитрая механика».

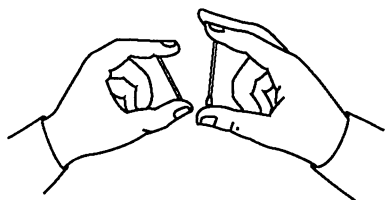


Рис. 86

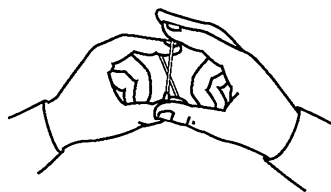


Рис. 87

1) Между указательным и большим пальцами каждой руки я держу по спичке — спичку в левой руке горизонтально, в правой — вертикально; я приближаю руки друг к другу так, чтобы спички скрестились (рис. 86). Теперь я делаю быстрое движение руками... И спички опять образуют крест, но теперь горизонтальная спичка находится по другую сторону вертикальной (рис. 87). Снова делаю движение руками, и спички снова находятся в первоначальном положении. Можно повторить этот фокус несколько раз, но никто не сможет понять, как это делается.

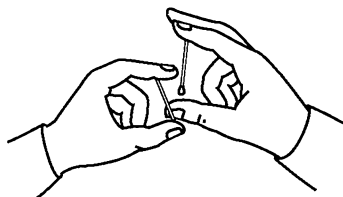


Рис. 88

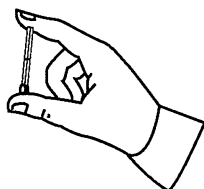


Рис. 89

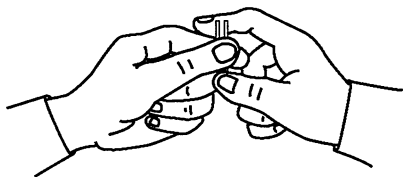


Рис. 90

Этот фокус, требующий предварительного небольшого упражнения, производится следующим образом. Вертикальная спичка помещается головкой вниз, так что последняя покоится на большом пальце, в то время как указательный палец опирается о другой ее конец. При небольшом сдвливании

этих пальцев спичка пристаёт к указательному пальцу. Теперь стоит только слегка раздвинуть пальцы, и спичка удерживается одним указательным пальцем — как бы висит на нем (рис. 88). Через полученный таким образом маленький прозор между спичкой и большим пальцем вы быстро и незаметно для других вводите и выводите горизонтальную спичку, всякий раз тотчас же закрывая отверстие.

2) По середине двух спичек проводят поперечную черту. Большим и указательным пальцами правой руки берут спички так, чтобы обе черты были видны сверху (рис. 89), далее теми же пальцами левой руки поворачивают эти спички наполоборота вокруг их короткой оси (т.е. принимая черту за ось вращения) так, что пальцы правой руки будут уже касаться противоположных концов спичек (рис. 90). Теперь спрашивают: «Черточки сверху или снизу?» Всякий ответит: «Снизу» — и ошибается, если, поворачивая спички вокруг их короткой оси, вы в то же время в пальцах левой руки незаметно повернете их вокруг длинной оси (т.е. оси, параллельной длине спичек).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика как искусство хорошо говорить

Ценность перевода с иностранного языка заключается в умении проникать в тайники мысли, изложенной на чужом языке. Ценность рисования состоит в наглядном изображении точных соотношений частей и перспективы. Ценность естествознания — в развитии независимости мысли. Ценность математики — логика и доказательность. Все эти положения известны приступающим к изучению приемов красноречия, к выработке в себе умения говорить плавно, убедительно и красиво. Начинающие свою жизненную карьеру часто говорят о пользе изучения перечисленных наук.

Цель, к которой должен стремиться говорящий, состоит в том, чтобы заставить других сосредоточить все свое внимание на мысли и убеждении оратора, заставить их отвлечься от их собственной личности. И ни в одной аудитории, может быть, не достигается эта цель легче, чем в аудитории математиков.

Сжатое рассуждение, точное доказательство, изображение необходимых выводов из данных предположений приковывают и сосредотачивают все умственные силы как объясняющего, так и слушающего.

В каких иных случаях изучающий инстинктивно найдет легчайшую возможность в немногих словах изложить многое? В каких иных обстоятельствах, следовательно, простая, не бьющая на эффект, но легкая и красивая форма изложения будет так уместна и плодотворна, как здесь? Вычурность и аффектация, как результат дурной привычки рисоваться, не имеют здесь места и потому быст-

ро исчезают! Между тем все другие особенности умения говорить находят здесь применение и постепенно развиваются при общем и связном течении мыслей объясняющего и слушателей.

Кроме того, язык математики очень емкий и, можно даже сказать, не требует перевода на другие языки, следовательно, международный. Например, все знают определение абсолютной величины числа: «абсолютной величиной числа или его модулем называется расстояние от точки на числовой оси, соответствующей этому числу, до начала отсчета. Модуль положительного числа есть само число, модуль нуля равен нулю, а модуль отрицательного числа есть число, ему противоположное». Эту длинную фразу в аудитории, где слушатели-математики не владеют русским языком, проносить бессмысленно, так как все равно никто не поймет без перевода. Допустим, переводчиков нет. Математик-лектор легко выходит из трудного положения:

$$[a] = \begin{cases} a, a > 0; \\ 0, a = 0; \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Здесь нет ни одного слова, но любой японец или француз, индус или швед, или любой другой, кто знаком с математикой, все поняли о модуле числа.

Попробуйте и вы, дорогой читатель, «перевести» на русский язык математическую фразу:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n, \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow [a_n - A] < \varepsilon.$$

Эффект математического красноречия должен заключаться в ясном, сжатом и точном выводе из известных факторов. К таким приемам и к такому образу мышления должен приучаться математик-оратор.

Было бы, пожалуй, хорошо, если бы во всех наших школах не только так называемых «точных» наук, но и в школах и обществах, обучающих красноречию, было бы написано известное изречение Платона: «Пусть не входит сюда никто, не знакомый с геометрией» (тогда словом «геометрия» объединяли все математические знания).

Вот вы, дорогой читатель, и ознакомились с нашими тремя книжками об основах математики. Может быть, вы читали все подряд. Тогда перед вами прошли в популярной, т.е. не всегда строгой форме почти все основы современной математики.

Если же вы, дорогой читатель, изучали в наших книжках только те разделы, которые вас интересовали заголовками или задачами, то не поленитесь и прочитайте остальные. Получите не только удовольствие, но и обогатите свой теоретический блок, так как «математика... ум в порядок приводит» (Ломоносов) и «великая книга природы написана математическими символами» (Гаусс).

Г. З. Генкин

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЕ ИЗДАНИЕ
Серия «Твой кругозор»

Игнатъев Емельян Игнатъевич

**В царстве смекалки,
или Арифметика для всех**

Книга III

ДЛЯ СТАРШЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Зав. редакцией *В. И. Егудин*
Редактор *Е. Г. Таран*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная верстка *Э. Н. Малания*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректор *Е. Г. Щербакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 27.06.08. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,53. Тираж 10 000 экз. Заказ № 26905.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва,
3-й проезд Марьиной Рощи, д. 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов,
ул. Чернышевского, д. 59. www.sarpk.ru



Т В О Й К Р У Г О З О Р

Е. И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ СМЕКАЛКИ

Книга III

ЭТО НОВОЕ ИЗДАНИЕ ЗНАМЕНИТОГО ТРЕХТОМНИКА
ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЫХОДИТ В ГОД ЕГО
СТОЛЕТНЕГО ЮБИЛЕЯ. КАК И ВЕК НАЗАД, ОН
ДОСТАВИТ СВОИМ ЧИТАТЕЛЯМ МНОГО ПРИЯТНЫХ
МИНУТ, ПОМОЖЕТ РАЗВИТЬ ЛОГИЧЕСКОЕ
МЫШЛЕНИЕ И СМЕКАЛКУ.

«Твой кругозор» — это проверенные временем традиции научно-познавательной литературы для детей. В серию вошли лучшие книги по гуманитарным и естественно-научным предметам, написанные российскими и зарубежными авторами. Книги серии позволят вам расширить кругозор, повысить свой образовательный уровень и стать знатоками в различных областях знаний.

МАТЕМАТИКА РУССКИЙ ЯЗЫК ФИЗИКА ГЕОГРАФИЯ ИСТОРИЯ

ISBN 978-5-09-018202-7



9 785090 182027